

Rozwiązania niektórych zadań z listy 9.

548. Wyznaczyć asymptoty funkcji f określonej wzorem

$$f(x) = \sqrt[4]{x^4 + x^3 + x^2}.$$

Rozwiązanie:

Zauważmy, że

$$x^4 + x^3 + x^2 = x^4 + x^3 + \frac{x^2}{4} + \frac{3 \cdot x^2}{4} = \left(x^2 + \frac{x}{2}\right)^2 + \frac{3 \cdot x^2}{4} \geq 0,$$

skąd wynika, że funkcja f jest określona na całej prostej rzeczywistej. Ponieważ funkcja f jest ciągła, nie ma ona asymptot pionowych.

Przystępujemy więc do próby wyznaczenia asymptot ukośnych/poziomych.

$$\begin{aligned} a &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[4]{x^4 + x^3 + x^2}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[4]{\frac{x^4 + x^3 + x^2}{x^4}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[4]{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} = 1. \\ b &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - ax) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt[4]{x^4 + x^3 + x^2} - x \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x^4 + x^3 + x^2) - x^4}{\left(\sqrt[4]{x^4 + x^3 + x^2} + x \right) \cdot \left(\sqrt{x^4 + x^3 + x^2} + x^2 \right)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 + x^2}{\left(\sqrt[4]{x^4 + x^3 + x^2} + x \right) \cdot \left(\sqrt{x^4 + x^3 + x^2} + x^2 \right)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + x^{-1}}{\left(\sqrt[4]{1 + x^{-1} + x^{-2}} + 1 \right) \cdot \left(\sqrt{1 + x^{-1} + x^{-2}} + 1 \right)} = \frac{1}{(1+1) \cdot (1+1)} = \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

W powyższych rachunkach skorzystaliśmy ze wzoru

$$s - t = \frac{s^4 - t^4}{(s+t) \cdot (s^2 + t^2)}.$$

Wyznaczając asymptotę przy $x \rightarrow -\infty$ pamiętamy, że w tym przypadku należy przyjąć założenie $x < 0$, a w konsekwencji $x = -|x| = -\sqrt[4]{x^4}$.

$$\begin{aligned} a &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt[4]{x^4 + x^3 + x^2}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt[4]{x^4 + x^3 + x^2}}{-\sqrt[4]{x^4}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-\sqrt[4]{\frac{x^4 + x^3 + x^2}{x^4}} \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-\sqrt[4]{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} \right) = -1. \\ b &= \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - ax) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\sqrt[4]{x^4 + x^3 + x^2} + x \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(x^4 + x^3 + x^2) - x^4}{\left(\sqrt[4]{x^4 + x^3 + x^2} - x \right) \cdot \left(\sqrt{x^4 + x^3 + x^2} + x^2 \right)} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 + x^2}{\left(\sqrt[4]{x^4 + x^3 + x^2} - x\right) \cdot \left(\sqrt{x^4 + x^3 + x^2} + x^2\right)} = \\
&= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1 + x^{-1}}{\left(\frac{\sqrt[4]{x^4 + x^3 + x^2}}{x} - 1\right) \cdot \left(\frac{\sqrt{x^4 + x^3 + x^2}}{x^2} + 1\right)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1 + x^{-1}}{\left(\frac{\sqrt[4]{x^4 + x^3 + x^2}}{-\sqrt[4]{x^4}} - 1\right) \cdot \left(\frac{\sqrt{x^4 + x^3 + x^2}}{\sqrt{x^4}} + 1\right)} = \\
&= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1 + x^{-1}}{\left(-\sqrt[4]{1 + x^{-1} + x^{-2}} - 1\right) \cdot \left(\sqrt{1 + x^{-1} + x^{-2}} + 1\right)} = \frac{1}{(-1 - 1) \cdot (1 + 1)} = -\frac{1}{4}.
\end{aligned}$$

Tym razem skorzystaliśmy ze wzoru

$$s + t = \frac{s^4 - t^4}{(s - t) \cdot (s^2 + t^2)}.$$

Odpowiedź: Dana funkcja ma w $+\infty$ asymptotę ukośną o równaniu $y = x + \frac{1}{4}$, natomiast w $-\infty$ asymptotę ukośną o równaniu $y = -x - \frac{1}{4}$.

549. Wyznaczyć asymptoty funkcji f określonej wzorem $f(x) = \sqrt[4]{x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 1}$.
Uwaga: Treść zadania jest poprawna - pod pierwiastkiem niczego nie brakuje - ma być tak jak jest napisane.

Rozwiązanie:

Zauważmy, że

$$x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 1 = x^4 + 4x^3 + 4x^2 + 2x^2 + 1 = (x^2 + 2x)^2 + 2x^2 + 1 > 0,$$

skąd wynika, że funkcja f jest określona na całej prostej rzeczywistej. Ponieważ funkcja f jest ciągła, nie ma ona asymptot pionowych.

Przystępujemy więc do próby wyznaczenia asymptot ukośnych/poziomych.

$$\begin{aligned}
a &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[4]{x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 1}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[4]{\frac{x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 1}{x^4}} = \\
&= \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[4]{1 + \frac{4}{x} + \frac{6}{x^2} + \frac{1}{x^4}} = 1. \\
b &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - ax) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt[4]{x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 1} - x\right) = \\
&= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 1) - x^4}{\left(\sqrt[4]{x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 1} + x\right) \cdot \left(\sqrt{x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 1} + x^2\right)} = \\
&= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x^3 + 6x^2 + 1}{\left(\sqrt[4]{x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 1} + x\right) \cdot \left(\sqrt{x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 1} + x^2\right)} = \\
&= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4 + 6x^{-1} + x^{-3}}{\left(\sqrt[4]{1 + 4x^{-1} + 6x^{-2} + x^{-4}} + 1\right) \cdot \left(\sqrt{1 + 4x^{-1} + 6x^{-2} + x^{-4}} + 1\right)} =
\end{aligned}$$

$$= \frac{4}{(1+1) \cdot (1+1)} = 1.$$

W powyższych rachunkach skorzystaliśmy ze wzoru

$$s - t = \frac{s^4 - t^4}{(s+t) \cdot (s^2 + t^2)}.$$

Wyznaczając asymptotę przy $x \rightarrow -\infty$ pamiętamy, że w tym przypadku należy przyjąć założenie $x < 0$, a w konsekwencji $x = -|x| = -\sqrt[4]{x^4}$.

$$\begin{aligned} a &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt[4]{x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 1}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt[4]{x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 1}}{-\sqrt[4]{x^4}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-\sqrt[4]{\frac{x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 1}{x^4}} \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-\sqrt[4]{1 + \frac{4}{x} + \frac{6}{x^2} + \frac{1}{x^4}} \right) = -1. \\ b &= \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - ax) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\sqrt[4]{x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 1} + x \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 1) - x^4}{\left(\sqrt[4]{x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 1} - x \right) \cdot \left(\sqrt{x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 1} + x^2 \right)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x^3 + 6x^2 + 1}{\left(\sqrt[4]{x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 1} - x \right) \cdot \left(\sqrt{x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 1} + x^2 \right)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4 + 6x^{-1} + x^{-3}}{\left(\frac{\sqrt[4]{x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 1}}{x} - 1 \right) \cdot \left(\frac{\sqrt{x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 1}}{x^2} + 1 \right)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4 + 6x^{-1} + x^{-3}}{\left(\frac{\sqrt[4]{x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 1}}{-\sqrt[4]{x^4}} - 1 \right) \cdot \left(\frac{\sqrt{x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 1}}{\sqrt[4]{x^4}} + 1 \right)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4 + 6x^{-1} + x^{-3}}{\left(-\sqrt[4]{1 + 4x^{-1} + 6x^{-2} + x^{-4}} - 1 \right) \cdot \left(\sqrt{1 + 4x^{-1} + 6x^{-2} + x^{-4}} + 1 \right)} = \\ &= \frac{4}{(-1-1) \cdot (1+1)} = -1. \end{aligned}$$

Tym razem skorzystaliśmy ze wzoru

$$s + t = \frac{s^4 - t^4}{(s-t) \cdot (s^2 + t^2)}$$

przy $s = \sqrt[4]{x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 1} > 0$ i $t = x < 0$, a więc w sytuacji, gdy $s - t$ jest dodatnie, a w konsekwencji różne od zera.

Odpowiedź: Dana funkcja ma w $+\infty$ asymptotę ukośną o równaniu $y = x + 1$, natomiast w $-\infty$ asymptotę ukośną o równaniu $y = -x - 1$.

550. W każdym z zadań **550.1-550.16** podaj granicę funkcji.

550.1. $\lim_{x \rightarrow -\infty} 2^x = 0$

550.2. $\lim_{x \rightarrow -\infty} 2^{2^x} = 1$

550.3. $\lim_{x \rightarrow -\infty} 2^{2^{2^x}} = 2$

550.4. $\lim_{x \rightarrow -\infty} 2^{2^{2^{2^x}}} = 4$

550.5. $\lim_{x \rightarrow -\infty} 2^{2^{2^{2^{2^x}}}} = 16$

550.6. $\lim_{x \rightarrow -\infty} 2^{3^{4^x}} = 2$

550.7. $\lim_{x \rightarrow -\infty} 4^{3^{2^x}} = 4$

550.8. $\lim_{x \rightarrow -\infty} 2^{3^{4^{5^x}}} = 8$

550.9. $\lim_{x \rightarrow -\infty} 3^{4^{5^{6^x}}} = 81$

550.10. $\lim_{x \rightarrow -\infty} 3^{2^{2^{4^{5^x}}}} = 81$

550.11. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + x} - x) = 1/2$

550.12. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 2x} - x) = 1$

550.13. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt[3]{x^3 + x^2} - x) = 1/3$

550.14. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt[3]{x^3 + 2x^2} - x) = 2/3$

550.15. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x^7 + x^6)}{\ln x} = 7$

550.16. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x^7 + 2x^6)}{\ln x} = 7$