

Funkcja pierwotna – zadania wstępne.**Grupa 2: zadania na ćwiczenia w środę 26.02.2020, godz. 13:15-16:00, s. B.****Grupy 1 i 3: zadania do samodzielnego rozwiązania¹.****Niektóre zadania mogą zostać (prawie) rozwiązane na pierwszym wykładzie².**Zadania należy rozwiązać nie używając znaku całki, ani słowa *całka*³.

1. Wyznaczyć wszystkie takie funkcje różniczkowalne $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, że $f'(x) = 0$ dla każdego $x \in \mathbb{R}$.

2. Dana jest funkcja różniczkowalna $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Wyznaczyć wszystkie funkcje różniczkowalne $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ spełniające warunek $g'(x) = f'(x)$ dla każdego $x \in \mathbb{R}$.

3. Dane są funkcje różniczkowalne $f_1, f_2: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Wyznaczyć wszystkie funkcje różniczkowalne $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ spełniające warunek $g'(x) = f_1'(x) + f_2'(x)$ dla każdego $x \in \mathbb{R}$.

4. Dana jest funkcja różniczkowalna $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ oraz liczba rzeczywista a . Wyznaczyć wszystkie funkcje różniczkowalne $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ spełniające warunek $g'(x) = a \cdot f'(x)$ dla każdego $x \in \mathbb{R}$.

5. Dana jest funkcja różniczkowalna $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ oraz niezerowa liczba rzeczywista a . Wyznaczyć wszystkie funkcje różniczkowalne $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ spełniające dla każdego $x \in \mathbb{R}$ warunek $g'(x) = f'(ax)$.

Odgadnąć wzór na funkcję różniczkowalną $f: D_f \rightarrow \mathbb{R}$, której pochodna jest dana wzorem:

6. $f'(x) = x^2$, $D_f = \mathbb{R}$ 7. $f'(x) = 10x^3$, $D_f = \mathbb{R}$ 8. $f'(x) = \sqrt{x}$, $D_f = (0, +\infty)$

9. $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$, $D_f = (0, +\infty)$ 10. $f'(x) = \frac{1}{x}$, $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

11. $f'(x) = \frac{1}{x^3}$, $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ 12. $f'(x) = e^{7x}$, $D_f = \mathbb{R}$

13. $f'(x) = \sin 66x$, $D_f = \mathbb{R}$ 14. $f'(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$, $D_f = \mathbb{R}$

15. $f'(x) = (x+1)^2$, $D_f = \mathbb{R}$ 16. $f'(x) = x^2 + 2x + 1$, $D_f = \mathbb{R}$

17. Niech n będzie liczbą całkowitą dodatnią. Wyznaczyć wszystkie takie funkcje n -krotnie różniczkowalne $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, że $f^{(n)}(x) = 0$ dla każdego $x \in \mathbb{R}$.

18. Funkcja różniczkowalna $f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ spełnia warunek $f'(x) = \frac{1}{x^2}$ dla każdego $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, a ponadto wiadomo, że $f(1) = 0$. Co można wywnioskować o $f(2)$ oraz o $f(-1)$?

¹Samodzielne rozwiązywanie można wspomóc wizytą na ćwiczeniach grupy 2.

²Pierwszy wykład odbędzie się w czwartek 27.02.2020, godz. 11:15-15:00, s. HS.

³Zakaz dotyczy słowa *całka* w sensie matematycznym. Dopuszczalne jest użycie tego słowa w znaczeniu staropolskim, chociaż wydaje się to mało przydatne w rozwiązaniu zadań z tej listy.

19. Wyznaczyć wszystkie takie funkcje dwukrotnie różniczkowalne $f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$, że dla każdego $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ zachodzi równość $f''(x) = \frac{1}{x^3}$.

20. Wyznaczyć wszystkie takie funkcje dwukrotnie różniczkowalne $f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$, że dla każdego $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ zachodzi równość $f''(x) = \frac{1}{x^3}$, a przy tym $f(1) = f'(1) = 0$.

21. Wyznaczyć wszystkie takie funkcje dwukrotnie różniczkowalne $f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$, że dla każdego $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ zachodzi równość $f''(x) = \frac{1}{x^3}$, a przy tym $f(1) = f(2) = 0$.

22. Wyznaczyć wszystkie takie funkcje dwukrotnie różniczkowalne $f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$, że dla każdego $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ zachodzi równość $f''(x) = \frac{1}{x^3}$, a przy tym $f(1) = f(-2) = 0$.

23. Wyznaczyć wszystkie takie funkcje dwukrotnie różniczkowalne $f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$, że dla każdego $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ zachodzi równość $f''(x) = \frac{1}{x^3}$, a przy tym spełniony jest warunek $f(1) = f(2) = f(-2) = 0$.

24. Wyznaczyć wszystkie takie funkcje 2020-krotnie różniczkowalne $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, że $f^{(2020)}(x) = e^{3x}$ dla każdego $x \in \mathbb{R}$.

25. Wyznaczyć wszystkie takie funkcje 2020-krotnie różniczkowalne $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, że $f^{(2020)}(x) = \sin^2 x$ dla każdego $x \in \mathbb{R}$.

26. Dane są funkcje różniczkowalne $f_1, f_2: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Wyznaczyć wszystkie funkcje różniczkowalne $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ spełniające warunek $g'(x) = f_1'(x) \cdot f_2(x) + f_1(x) \cdot f_2'(x)$ dla każdego $x \in \mathbb{R}$.

27. Dane są funkcje różniczkowalne $f_1, f_2: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Wyznaczyć wszystkie funkcje różniczkowalne $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ spełniające warunek $g'(x) = f_1'(f_2(x)) \cdot f_2'(x)$ dla każdego $x \in \mathbb{R}$.

28. Dana jest funkcja różniczkowalna $f: \mathbb{R} \rightarrow (0, +\infty)$. Wyznaczyć wszystkie funkcje różniczkowalne $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ spełniające warunek $g'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}$ dla każdego $x \in \mathbb{R}$.

29. Dana jest funkcja różniczkowalna $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Wyznaczyć wszystkie funkcje różniczkowalne $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ spełniające warunek $g'(x) = f'(x) \cdot f(x)$ dla każdego $x \in \mathbb{R}$.

30. Na wyspach Bergamutach podobno jest kot w butach i podobno zamiast zwykłych funkcji trygonometrycznych używają tam funkcji *losinus*, *nosinus* oraz *sosinus* podlegających następującym regułom różniczkowania:

$$\frac{d}{dx} \text{los } x = \text{nos } x, \quad \frac{d}{dx} \text{nos } x = \text{sos } x, \quad \frac{d}{dx} \text{sos } x = \text{los } x.$$

Wyznaczyć wszystkie funkcje 2020-krotnie różniczkowalne $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ spełniające warunek $f^{(2020)}(x) = \text{los}(2020x)$ dla każdego $x \in \mathbb{R}$.