

113. Obliczyć całkę nieoznaczoną

$$\int \frac{dx}{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + x}}}.$$

Rozwiązanie:

Wykonujemy podstawienie

$$t = \sqrt{1 + \sqrt{1 + x}},$$

co daje

$$t^2 = 1 + \sqrt{1 + x},$$

$$t^2 - 1 = \sqrt{1 + x},$$

$$(t^2 - 1)^2 = 1 + x,$$

$$(t^2 - 1)^2 - 1 = x,$$

$$t^4 - 2t^2 = x$$

i formalnie

$$4 \cdot (t^3 - t) dt = dx.$$

Otrzymujemy:

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + x}}} &= \int \frac{4 \cdot (t^3 - t) dt}{1 + t} = 4 \cdot \int t^2 - t dt = \frac{4t^3}{3} - 2t^2 + C = \\ &= \frac{4 \cdot (\sqrt{1 + \sqrt{1 + x}})^3}{3} - 2 \cdot (\sqrt{1 + \sqrt{1 + x}})^2 + C = \frac{4 \cdot (\sqrt{1 + \sqrt{1 + x}})^3}{3} - 2 - 2\sqrt{1 + x} + C = \\ &= \frac{4 \cdot (\sqrt{1 + \sqrt{1 + x}})^3}{3} - 2\sqrt{1 + x} + C_2. \end{aligned}$$

114. Obliczyć całkę nieoznaczoną

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}}.$$

Rozwiązanie:

Wykonując podstawienie $x = t^6$ i formalnie $dx = 6t^5 dt$, otrzymujemy:

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}} &= \int \frac{6t^5 dt}{t^3 + t^2} = 6 \cdot \int \frac{t^3 dt}{t + 1} = 6 \cdot \int \frac{(t^3 + 1) - 1}{t + 1} dt = 6 \cdot \int t^2 - t + 1 - \frac{1}{t + 1} dt = \\ &= 2t^3 - 3t^2 + 6t - 6 \cdot \ln|t + 1| + C = 2 \cdot \sqrt{x} - 3 \cdot \sqrt[3]{x} + 6 \cdot \sqrt[6]{x} - 6 \cdot \ln(\sqrt[6]{x} + 1) + C. \end{aligned}$$

115. Obliczyć całkę nieoznaczoną

$$I(x) = \int \frac{e^{\sqrt{\ln x}}}{x} dx.$$

Sprawdzić, że $I(e) = I(1) + 2$, a jeśli tak nie jest, poszukać błędu rachunkowego.

Rozwiązanie:

Wykonujemy podstawienie $t = \sqrt{\ln x}$, czyli $x = e^{t^2}$ i formalnie $dx = e^{t^2} \cdot 2t dt$, a następnie całkujemy przez części:

$$\begin{aligned} I(x) &= \int \frac{e^{\sqrt{\ln x}}}{x} dx = \int \frac{e^t}{e^{t^2}} \cdot e^{t^2} \cdot 2t dt = 2 \int t \cdot e^t dt = 2t \cdot e^t - 2 \int e^t dt = 2t \cdot e^t - 2e^t + C = \\ &= 2\sqrt{\ln x} \cdot e^{\sqrt{\ln x}} - 2e^{\sqrt{\ln x}} + C. \end{aligned}$$

Sprawdzenie:

$$I(1) = -2 + C,$$

$$I(e) = C = -2 + 2 + C = I(1) + 2.$$

116. Obliczyć całkę nieoznaczoną

$$\int \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + x}}} dx.$$

Rozwiązanie:

Wykonując podstawienie

$$t = \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + x}}},$$

skąd kolejno

$$\sqrt{1 + \sqrt{1 + x}} = t^2 - 1,$$

$$\sqrt{1 + x} = (t^2 - 1)^2 - 1 = t^4 - 2t^2,$$

$$x = (t^4 - 2t^2)^2 - 1 = t^8 - 4t^6 + 4t^4 - 1$$

i formalnie

$$dx = 8t^7 - 24t^5 + 16t^3 dt,$$

otrzymujemy:

$$\begin{aligned} \int \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + x}}} dx &= \int t \cdot (8t^7 - 24t^5 + 16t^3) dt = \int 8t^8 - 24t^6 + 16t^4 dt = \\ &= \frac{8t^9}{9} - \frac{24t^7}{7} + \frac{16t^5}{5} + C = \\ &= \frac{8}{9} \cdot \left(1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + x}}\right)^{9/2} - \frac{24}{7} \cdot \left(1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + x}}\right)^{7/2} + \frac{16}{5} \cdot \left(1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + x}}\right)^{5/2} + C. \end{aligned}$$

117. Obliczyć całkę nieoznaczoną

$$\int e^x \cdot \sin \sqrt{e^x + 1} dx.$$

Rozwiązanie:

Wykonując podstawienie $t = \sqrt{e^x + 1}$, czyli $t^2 = e^x + 1$ i formalnie $2t dt = e^x dx$, a następnie całkując przez części, otrzymujemy

$$\int e^x \cdot \sin \sqrt{e^x + 1} dx = \int \sin t \cdot 2t dt = 2 \cdot \int t \cdot \sin t dt = 2 \cdot t \cdot (-\cos t) - 2 \cdot \int 1 \cdot (-\cos t) dt =$$

$$\begin{aligned}
&= -2 \cdot t \cdot \cos t + 2 \cdot \int \cos t \, dt = -2 \cdot t \cdot \cos t + 2 \cdot \sin t + C = \\
&= -2 \cdot \sqrt{e^x + 1} \cdot \cos \sqrt{e^x + 1} + 2 \cdot \sin \sqrt{e^x + 1} + C.
\end{aligned}$$

118. Obliczyć całkę nieoznaczoną

$$\int \frac{2x+3}{x^4+x^2} dx.$$

Rozwiązanie:

Rozkładamy funkcję podcałkową na sumę ułamków prostych:

$$\begin{aligned}
\frac{2x+3}{x^4+x^2} &= \frac{2x+3}{(x^2+1) \cdot x^2} = \frac{Ax+B}{x^2+1} + \frac{D}{x^2} + \frac{E}{x}, \\
2x+3 &= (Ax+B) \cdot x^2 + D \cdot (x^2+1) + E \cdot (x^2+1) \cdot x, \\
2x+3 &= Ax^3 + Bx^2 + Dx^2 + D + Ex^3 + Ex, \\
&\begin{cases} 0 &= A+E \\ 0 &= B+D \\ 2 &= E \\ 3 &= D, \end{cases}
\end{aligned}$$

skąd $A = -2$ i $B = -3$. W konsekwencji

$$\int \frac{2x+3}{x^4+x^2} dx = \int \frac{-2x}{x^2+1} - \frac{3}{x^2+1} + \frac{3}{x^2} + \frac{2}{x} dx = -\ln(x^2+1) - 3\operatorname{arctg}x - \frac{3}{x} + 2\ln|x| + C.$$

119. Obliczyć całkę nieoznaczoną

$$\int \frac{2x+3}{x \cdot (x+1) \cdot (x+2) \cdot (x+3)} dx.$$

Rozwiązanie:

Sposób I (normalny):

Rozkładamy funkcję podcałkową na ułamki proste:

$$\begin{aligned}
\frac{2x+3}{x \cdot (x+1) \cdot (x+2) \cdot (x+3)} &= \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} + \frac{D}{x+2} + \frac{E}{x+3}, \\
2x+3 &= \frac{A \cdot (x+1) \cdot (x+2) \cdot (x+3)}{x \cdot (x+1) \cdot (x+2) \cdot (x+3)} + \frac{B \cdot x \cdot (x+2) \cdot (x+3)}{x \cdot (x+1) \cdot (x+2) \cdot (x+3)} + \\
&+ \frac{D \cdot x \cdot (x+1) \cdot (x+3)}{x \cdot (x+1) \cdot (x+2) \cdot (x+3)} + \frac{E \cdot x \cdot (x+1) \cdot (x+2)}{x \cdot (x+1) \cdot (x+2) \cdot (x+3)}. \quad (1)
\end{aligned}$$

W czasie, gdy miłośnicy rachunków są zajęci wymnażaniem wielomianu po prawej stronie równania (1), układaniem układu czterech równań liniowych z czterema niewiadomymi i rozwiązywaniem go, podstawimy do równości (1) kolejno $x = 0, -1, -2, -3$. Otrzymujemy:

$$\begin{aligned}
\text{dla } x=0 & \quad 3=6A, \quad \text{skąd } A=1/2, \\
\text{dla } x=-1 & \quad 1=-2B, \quad \text{skąd } B=-1/2, \\
\text{dla } x=-2 & \quad -1=2D, \quad \text{skąd } D=-1/2, \\
\text{dla } x=-3 & \quad -3=-6E, \quad \text{skąd } E=1/2.
\end{aligned}$$

To pozwala dokończyć obliczanie danej w zadaniu całki:

$$\begin{aligned}\int \frac{2x+3}{x \cdot (x+1) \cdot (x+2) \cdot (x+3)} dx &= \frac{1}{2} \cdot \int \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2} + \frac{1}{x+3} dx = \\ &= \frac{1}{2} \cdot (\ln|x| - \ln|x+1| - \ln|x+2| + \ln|x+3|) + C.\end{aligned}$$

Sposób II (trikowy):

Przepisujemy daną całkę w postaci

$$\begin{aligned}\int \frac{2x+3}{x \cdot (x+1) \cdot (x+2) \cdot (x+3)} dx &= \int \frac{2x+3}{(x \cdot (x+3)) \cdot ((x+1) \cdot (x+2))} dx = \\ &= \int \frac{2x+3}{(x^2+3x) \cdot (x^2+3x+2)} dx,\end{aligned}$$

a następnie podstawiamy $t = x^2 + 3x$ i formalnie $dt = (2x+3) dx$. Otrzymujemy

$$\int \frac{2x+3}{(x^2+3x) \cdot (x^2+3x+2)} dx = \int \frac{dt}{t \cdot (t+2)}.$$

Rozkład na ułamki proste prowadzi do

$$\frac{1}{t \cdot (t+2)} = \frac{1/2}{t} - \frac{1/2}{t+2},$$

co pozwala dokończyć obliczenia:

$$\begin{aligned}\int \frac{dt}{t \cdot (t+2)} &= \frac{1}{2} \cdot \int \frac{1}{t} - \frac{1}{t+2} dt = \frac{1}{2} \cdot (\ln|t| - \ln|t+2|) + C = \\ &= \frac{1}{2} \cdot (\ln|x^2+3x| - \ln|x^2+3x+2|) + C.\end{aligned}$$

120. Obliczyć całkę nieoznaczoną

$$\int \frac{x+2}{x \cdot (x+1) \cdot (x+3) \cdot (x+4)} dx.$$

Rozwiązanie:

Sposób I (normalny):

Rozkładamy funkcję podcałkową na ułamki proste:

$$\begin{aligned}\frac{x+2}{x \cdot (x+1) \cdot (x+3) \cdot (x+4)} &= \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} + \frac{D}{x+3} + \frac{E}{x+4}, \\ x+2 &= \frac{A \cdot (x+1) \cdot (x+3) \cdot (x+4)}{x \cdot (x+1) \cdot (x+3) \cdot (x+4)} + \frac{B \cdot x \cdot (x+3) \cdot (x+4)}{x \cdot (x+1) \cdot (x+3) \cdot (x+4)} + \\ &+ \frac{D \cdot x \cdot (x+1) \cdot (x+4)}{x \cdot (x+1) \cdot (x+3) \cdot (x+4)} + \frac{E \cdot x \cdot (x+1) \cdot (x+3)}{x \cdot (x+1) \cdot (x+3) \cdot (x+4)}.\end{aligned}\quad (2)$$

W czasie, gdy miłośnicy rachunków są zajęci wymnażaniem wielomianu po prawej stronie równania (2), układaniem układu czterech równań liniowych z czterema niewiadomymi i rozwiązywaniem go, podstawimy do równości (2) kolejno $x=0, -1, -3, -4$. Otrzymujemy:

$$\text{dla } x=0 \quad 2 = 12A, \text{ skąd } A = 1/6,$$

$$\text{dla } x=-1 \quad 1 = -6B, \text{ skąd } B = -1/6,$$

$$\text{dla } x = -3 \quad -1 = 6D, \text{ skąd } D = -1/6,$$

$$\text{dla } x = -4 \quad -2 = -12E, \text{ skąd } E = 1/6.$$

To pozwala dokończyć obliczanie danej w zadaniu całki:

$$\begin{aligned} \int \frac{x+2}{x \cdot (x+1) \cdot (x+3) \cdot (x+4)} dx &= \frac{1}{6} \cdot \int \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+3} + \frac{1}{x+4} dx = \\ &= \frac{1}{6} \cdot (\ln|x| - \ln|x+1| - \ln|x+3| + \ln|x+4|) + C. \end{aligned}$$

Sposób II (trikowy):

Przepisujemy daną całkę w postaci

$$\begin{aligned} \int \frac{x+2}{x \cdot (x+1) \cdot (x+3) \cdot (x+4)} dx &= \int \frac{x+2}{(x \cdot (x+4)) \cdot ((x+1) \cdot (x+3))} dx = \\ &= \int \frac{x+2}{(x^2+4x) \cdot (x^2+4x+3)} dx, \end{aligned}$$

a następnie podstawiamy $t = x^2 + 4x$ i formalnie $dt = 2(x+2) dx$. Otrzymujemy

$$\int \frac{x+2}{(x^2+4x) \cdot (x^2+4x+3)} dx = \frac{1}{2} \cdot \int \frac{dt}{t \cdot (t+3)}.$$

Rozkład na ułamki proste prowadzi do

$$\frac{1}{t \cdot (t+3)} = \frac{1/3}{t} - \frac{1/3}{t+3},$$

co pozwala dokończyć obliczenia:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \cdot \int \frac{dt}{t \cdot (t+3)} &= \frac{1}{6} \cdot \int \frac{1}{t} - \frac{1}{t+3} dt = \frac{1}{6} \cdot (\ln|t| - \ln|t+3|) + C = \\ &= \frac{1}{6} \cdot (\ln|x^2+4x| - \ln|x^2+4x+3|) + C. \end{aligned}$$