

Dzień 1 (poniedziałek 16 marca 2020)

Całka oznaczona

Ostatni wykład¹ poświęciłem na wstęp do pojęcia całki oznaczonej. Pojęcie to ma dwa oblicza, które kiedyś tam się spotykają, ale początkowo idą zupełnie niezależnie od siebie. Oblicze pierwsze, które zajęło mi większość wykładu, to grzebanie się w podziałach przedziału i polach figur złożonych z prostokątów. Jest to dość techniczne, więc kontynuowanie tego wątku odłożymy na później. Zajmiemy się natomiast obliczem drugim, które pojawiło się dopiero pod koniec wtorkowego wykładu.

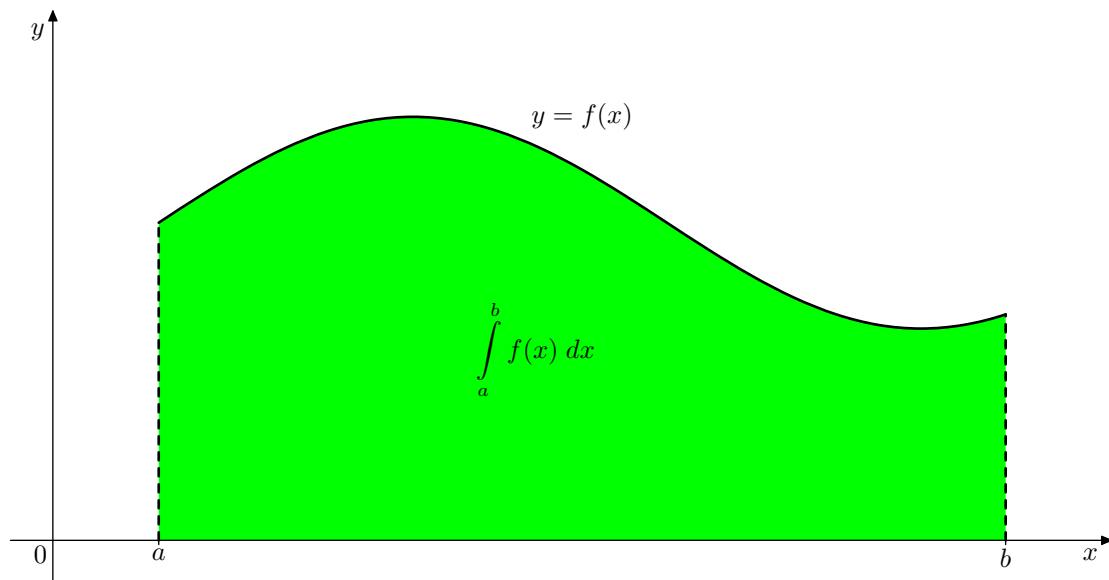
Niezależnie od tego, którym obliczem całki oznaczonej się zajmujemy, powiedzieć sobie trzeba najpierw, czymże ta całka w ogóle jest.

Niech $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją. Załóżmy, że ciągłą, chociaż z tej ciągłości zrezygnujemy w przyszłości². I do tego niech f będzie funkcją o wartościach dodatnich, chociaż z tego założenia zrezygnujemy jeszcze szybciej.

Interesuje nas pole obszaru³:

$$\{(x, y) : x \in [a, b] \wedge 0 \leq y \leq f(x)\}$$

zamalowanego na zielono na rysunku 1. Nie bawimy się przy tym w definiowanie, czym jest pole figury płaskiej, przyjmując na razie nieformalną definicję intuicyjno-użytkową: *Pole, czym jest, każdy wie.*



rys. 1

¹We wtorek 10 marca 2020 r.

²Rym niezamierzony i niepotrzebny, ale nie będę się gimnastykował z takim układaniem tego zdania, aby rymu nie było.

³W skrócie mówi się o obszarze pod wykresem funkcji f na przedziale $[a, b]$.

Figura ta zależy od liczb a i b oraz funkcji f , więc jakkolwiek chcielibyśmy oznaczyć jej pole powierzchni, oznaczenie to musi zawierać w sobie jakoś wkomponowane te trzy elementy. Przyjmujemy oznaczenie

$$\int_a^b f(x) dx,$$

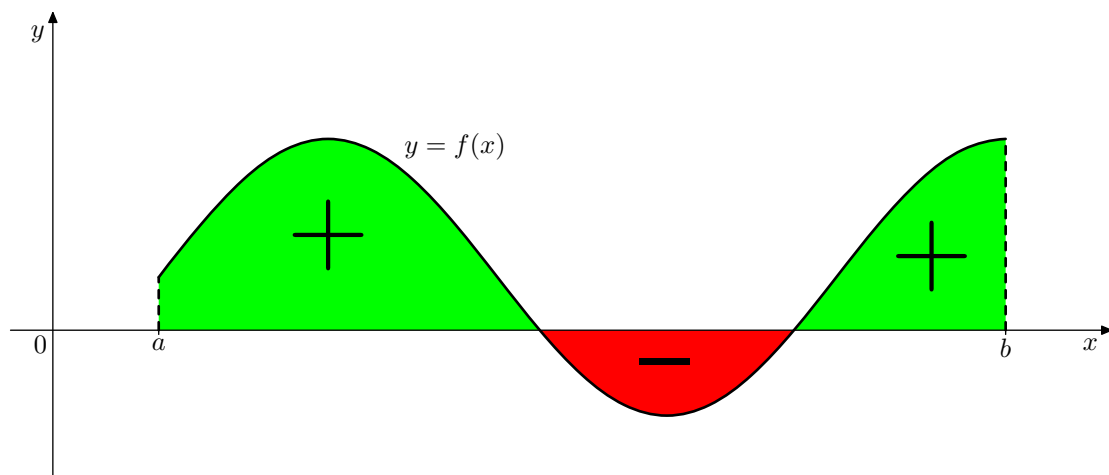
które z tajemniczych (na razie) powodów jest podobne do całki nieoznaczonej i w ogóle nie wiedzieć czemu nazywa się całką. W oznaczeniu tym występuje także zmienna x , która jest zmienną związaną⁴, może być więc zamieniona na prawie każdą inną literkę bez zmiany znaczenia całego wyrażenia. Na przykład możemy równie dobrze napisać:

$$\int_a^b f(t) dt.$$

Założenie dodatniości funkcji f jest potrzebne tylko po to, aby zrobić ładniejszy rysunek i mówić o czystym polu geometrycznym. Ale jeśli funkcja f bywa ujemna, jak na przykład na rysunku 2, to $\int_a^b f(x) dx$ oznaczać będzie algebraiczną sumę pól:

- pole zamalowane na zielono, leżące pod wykresem⁵ funkcji i jednocześnie nad osią OX , uwzględniamy normalnie,
- pole zamalowane na czerwono, leżące **nad** wykresem⁶ funkcji i jednocześnie **pod** osią OX , uwzględniamy z przeciwnym znakiem.

Całka oznaczona jest więc równa polu zielonemu minus pole czerwone.



rys. 2

⁴Czym są zmienne wolne i zmienne związane, wyjaśniać tu nie będę, przyjmując, że jest to przedmiotem *Wstępu do Matematyki*.

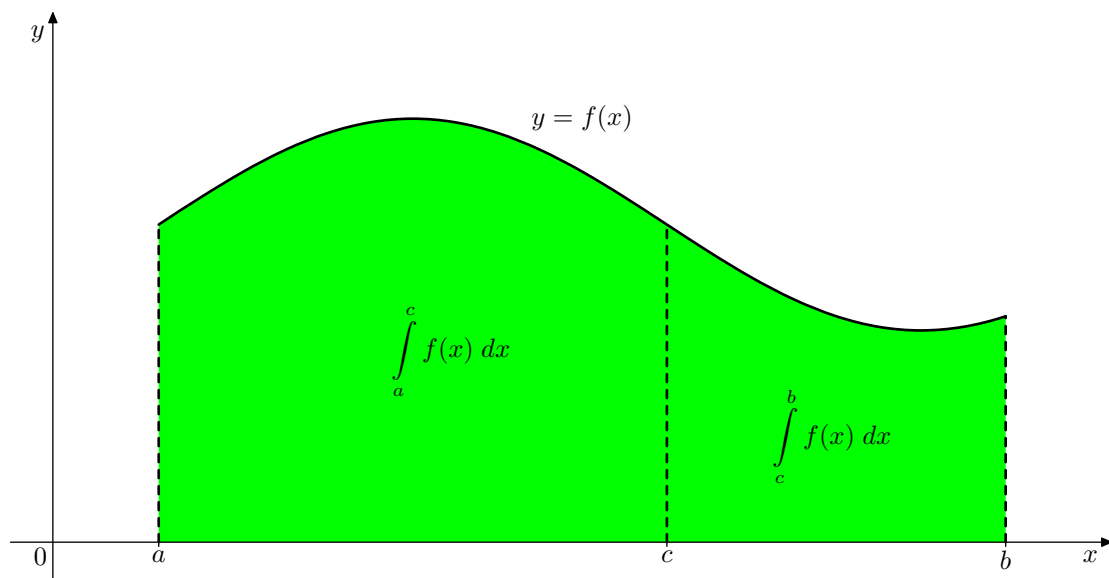
⁵Tam funkcja f jest dodatnia.

⁶Tam funkcja f jest ujemna.

Pierwszą własnością całki oznaczonej, którą chcę tu przytoczyć, jest równość

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx,$$

która zachodzi dla każdego $c \in (a, b)$. Równość ta jest oczywista⁷, jeśli spojrzymy uważnie na rysunek 3.

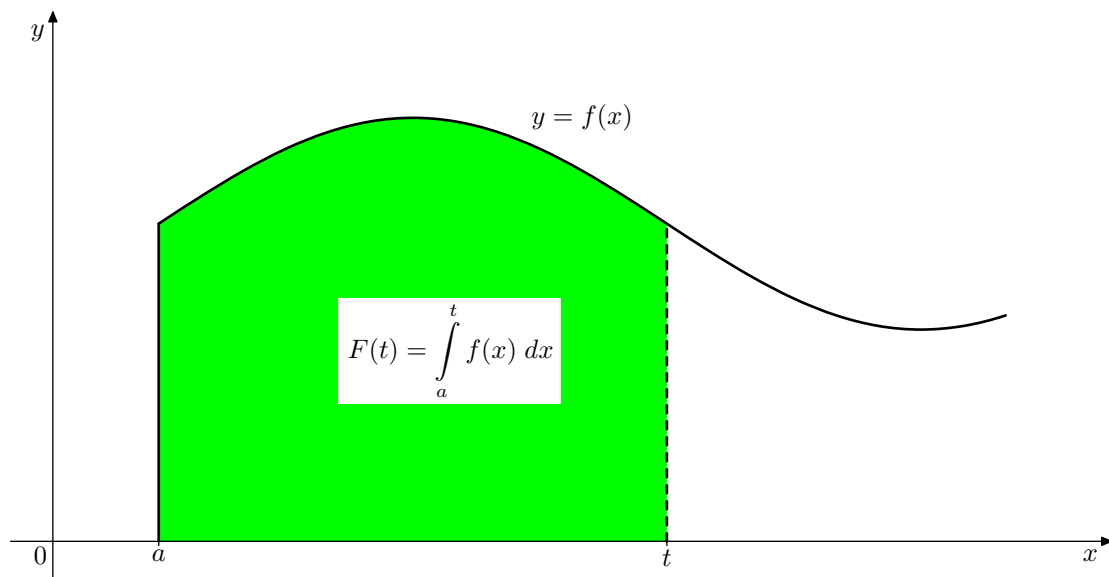


rys. 3

⁷Tego, że jak rozetniemy figurę na dwa kawałki, to suma pól kawałków jest równa polu całej figury, tłumaczyć chyba nie trzeba.

Ustalmy teraz lewy koniec przedziału, niech to będzie jak dotychczas a , natomiast zmieniamy⁸ koniec prawy, oznaczając go literką t , co lepiej kojarzy się z wielkością zmienną. Oznaczmy dla krótkości pole odpowiedniej figury (rys. 4), czyli całkę oznaczoną, przez $F(t)$. W ten sposób otrzymujemy jakąś funkcję F . Póki co, nie za wiele o niej wiemy, nie wiemy na przykład czy jest ciągła.

Ale co tam ciągłość. Wykażemy więcej, a mianowicie udowodnimy, że funkcja F jest różniczkowalna⁹. Mało tego, jej pochodna F' jest nie byle czym.



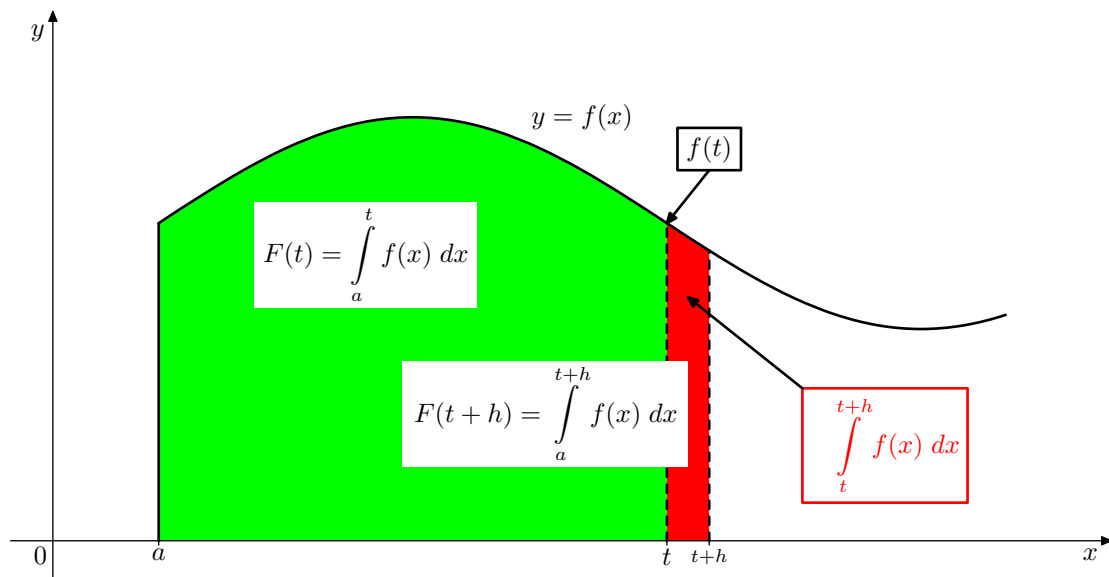
rys. 4

⁸W sensownym zakresie.

⁹Mam nadzieję, że wszyscy pamiętają, iż funkcja różniczkowalna jest ciągła, a więc różniczkowalność jest warunkiem mocniejszym niż sama tylko ciągłość.

Z definicji pochodnej otrzymujemy¹⁰ (zobacz rys. 5):

$$F'(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(t+h) - F(t)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(t+h) - F(t)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\int_t^{t+h} f(x) dx}{h}.$$



rys. 5

W liczniku ostatniego wyrażenia występuje całka, która wyraża pole zamalowane na rysunku 5 na czerwono. Jest to pole trapezu¹¹ krzywoliniowego, który z dobrym przybliżeniem jest prostokątem o boku poziomym długości h i boku pionowym długości $f(t)$, a więc polu w przybliżeniu równym $h \cdot f(t)$, przy czym (z uwagi na ciągłość funkcji f) przybliżenie to jest świetne, jeśli h bardzo bliskie 0.

W ten sposób dochodzimy¹² do

$$F'(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\int_t^{t+h} f(x) dx}{h} = f(t),$$

co oznacza, że ...

... funkcja F jest funkcją pierwotną funkcji f .

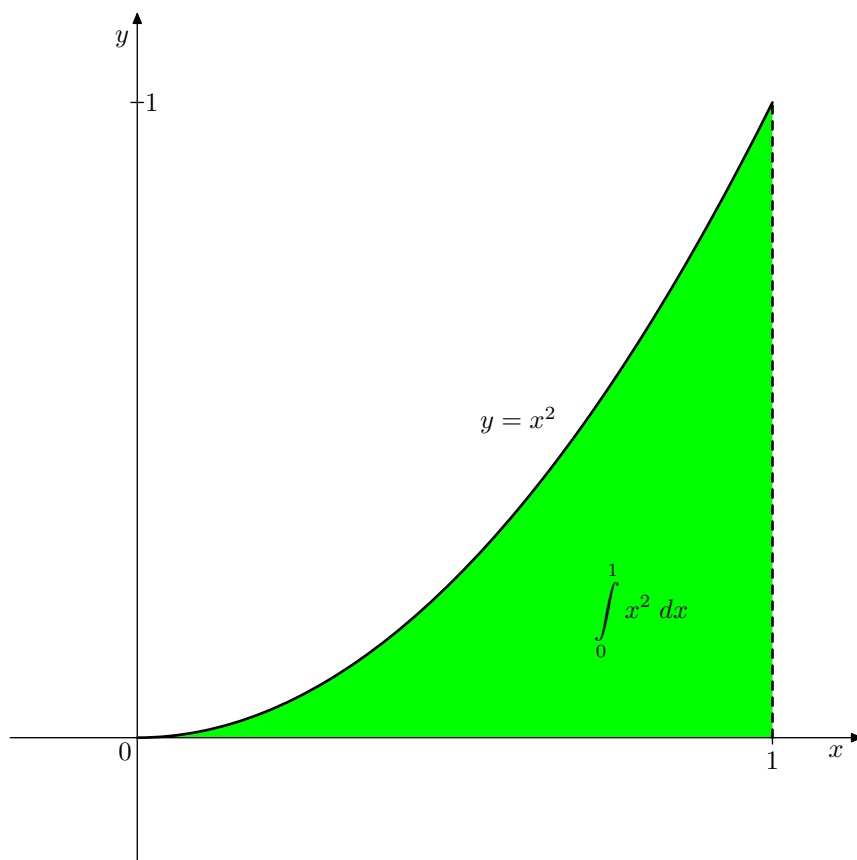
Ale którą pierwotną? Bo przecież funkcji pierwotnych jest dużo. Ano tą, dla której $F(a) = 0$, albowiem przy $t = a$ rozważana przez nas figura degeneruje się do pionowego odcinka, którego pole jest równe 0.

¹⁰Rysunek i rachunki zrobione są przy nieistotnym założeniu, że $h > 0$. Przypadek $h < 0$ wymagałby zobnienia podobnego rysunku i przeprowadzenia analogicznych rachunków.

¹¹Trapez widzi każdy, kto zapatrzy się na dwa pionowe równoległe boki. Można też zobaczyć prostokąt, tylko krzywo ucięty na górze.

¹²Dla precyzyjnego dowodu trzeba się pobawić definicją Cauchy'ego ciągłości funkcji f w punkcie t . Zainteresowanych odsyłam do podręcznika prof. Marcinkowskiej, strona 408 i kawałek następnej – Twierdzenie 6 wraz z dowodem.

Pamiętasz, jak na wykładzie pracowicie¹³ wyliczyliśmy, że pole trójkąta krzywoliniowego (rys. 6) ograniczonego osią OX , prostą o równaniu $x=1$ oraz parabolą o równaniu $y=x^2$ jest równe $1/3$?



rys. 6

¹³Licząc pola odpowiednich figur złożonych z prostokątów i przechodząc do granicy.

To samo można osiągnąć wprowadzając funkcję F opisaną na rysunku 7.

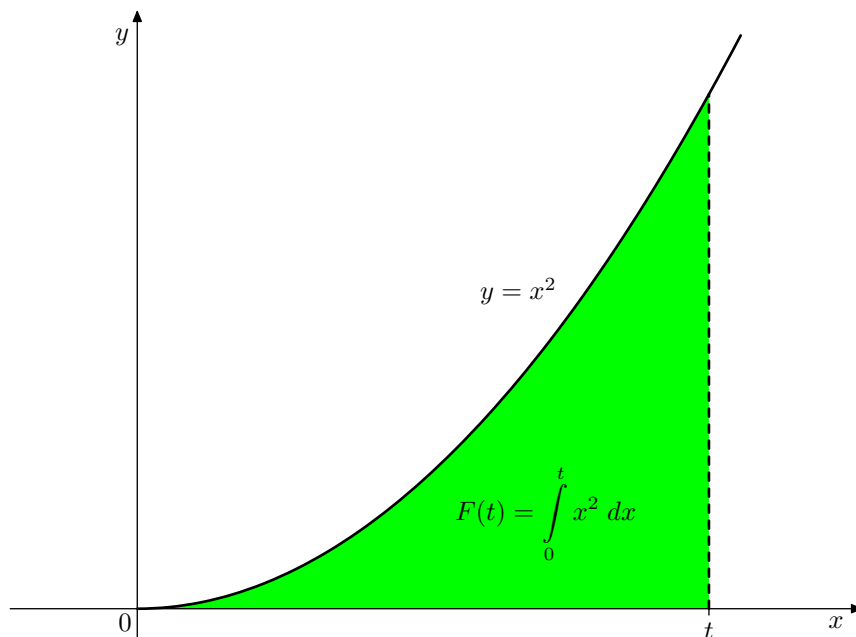
Funkcja F jest funkcją pierwotną funkcji określonej wzorem x^2 , a ponadto $F(0) = 0$. Skoro $F'(x) = x^2$, to¹⁴

$$F(x) = \int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + C,$$

a skoro $F(0) = 0$, to $C = 0$, wobec czego

$$F(x) = \frac{x^3}{3}.$$

W konsekwencji pole trójkąta krzywoliniowego z rysunku 6 jest równe $F(1) = 1/3$.



rys. 7

Obejrzyj w internecie¹⁵ wykłady doc. Górniaka z PWr:

Odcinek **70**: Funkcja z argumentem w górnej granicy całkowania

Odcinek **71**: Twierdzenie Newtona - Leibniza¹⁶ - podstawowe tw. rachunku całkowego

Uwagi: Zamiana ról literek x i t nie ma znaczenia, można równie dobrze tak i tak, rzecz gustu. Mój osobisty smak nakazuje mi pisać $\frac{d}{dx} \frac{x^2}{2}$, a zdecydowanie unikać $\left(\frac{x^2}{2}\right)'$, chociaż doceniam krótkość tej formy oraz to, że na ogół nie prowadzi ona do nieporozumień. Jednak matematyka uniwersytecka wymaga szczególnie starannego doboru oznaczeń.

¹⁴Pozwalamy sobie na pewną drobną nieścisłość stawiając znak równości między całką nieoznaczoną (czyli zbiorem wszystkich funkcji pierwotnych zapisywanym jako ogólna postać funkcji pierwotnej), a funkcją F , która jest jedną szczególną funkcją pierwotną.

¹⁵Pod adresem: <https://oze.pwr.edu.pl/kursy/analiza/analiza.html>

¹⁶Naprawdę chodzi o Leibniza (bez t), ale podaję tytuł wykładu tak, jak pojawia się w spisie treści.