

Dzień 2 (wtorek 17 marca 2020)

Z wczorajszego wykładu wiemy, że dla funkcji ciągłej $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ funkcja F określona wzorem

$$F(t) = \int_a^t f(x) dx$$

jest taką funkcją pierwotną funkcji f , że $F(a) = 0$. Jeśli ktoś chce zwracać uwagę na formalne detale, to dodać należy, że F jest określona na przedziale $[a, b]$, a jej pochodną w punktach a i b zastępują odpowiednie pochodne jednostronne¹.

To prowadzi do następującej procedury obliczania całki oznaczonej $\int_a^b f(x) dx$:

1° Oblicz całkę nieoznaczoną $\int f(x) dx$.

2° Dobierz tak stałą całkowania, aby otrzymać taką funkcję pierwotną funkcji f , niech ta funkcja pierwotna nazywa się F , że $F(a) = 0$.

3° Oblicz $F(b)$. To jest właśnie szukana całka $\int_a^b f(x) dx$.

Przykład: Obliczyć $\int_1^2 x^2 dx$.

1° Obliczamy całkę nieoznaczoną $\int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + C$.

2° Dobieramy stałą całkowania $C = -1/3$. W konsekwencji $F(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{1}{3}$ oraz $F(1) = 0$.

3° Obliczamy $F(2) = \frac{7}{3}$. Wobec tego

$$\int_1^2 x^2 dx = \frac{7}{3}.$$

Ufff... Wyszło, chociaż może najwygodniejsze te rachunki nie były. Pierwsza refleksja jest taka, że gdybyśmy inaczej wybrali stałą całkowania, nie wpłynęło by to na wartość różnicy $F(b) - F(a)$, czyli przyrostu funkcji F na przedziale $[a, b]$. To prowadzi do nieco prostszej procedury, opisanej na następnej stronie.

¹Na ogół funkcja f jest określona na przedziale większym niż $[a, b]$ i w konsekwencji funkcja F ma w punktach a i b całkowicie legalną obustronną pochodną, nie tylko jednostronną namiastkę pochodnej.

Nieco uproszczona procedura obliczania całki oznaczonej $\int_a^b f(x) dx$:

1° Oblicz całkę nieoznaczoną $\int f(x) dx$.

2° Dobierz jakąkolwiek stałą całkowania, aby otrzymać jakąkolwiek funkcję pierwotną funkcji f , niech ta funkcja pierwotna nazywa się F .

3° Oblicz $F(b) - F(a)$. To jest właśnie szukana całka $\int_a^b f(x) dx$.

W naszym przykładzie:

1° Obliczamy całkę nieoznaczoną $\int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + C$.

2° Dobieramy stałą całkowania $C=0$, bo tak jest najprościej. W konsekwencji $F(x) = \frac{x^3}{3}$.

3° Obliczamy $F(2) - F(1) = \frac{7}{3}$.

Odrobinę prościej, ale zapis dość niewygodny. A oto jak te rachunki będziemy zapisywać w przyszłości.

Ogólnie:

$$\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_{x=a}^b = F(b) - F(a).$$

W naszym przykładzie:

$$\int_1^2 x^2 dx = \frac{x^3}{3} \Big|_{x=1}^2 = \frac{8}{3} - \frac{1}{3} = \frac{7}{3}.$$

Pionowa kreska po wyrażeniu oznacza, że nie interesuje nas to wyrażenie, ale jego przyrost w podanych granicach. Zwróć uwagę, że w powyższych wzorach mamy równości między liczbami.

Terminologia: W całce oznaczonej $\int_a^b f(x) dx$ funkcję f nazywamy funkcją podcałkową, a przedział $[a, b]$ przedziałem całkowania. Liczby a i b nazywamy granicami całkowania, odpowiednio dolną i górną.

Z własności całki nieoznaczonej oraz z wcześniejszych rozważań wynikają następujące wzory:

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x) dx &= \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx \\ \int_a^b f(x) \pm g(x) dx &= \int_a^b f(x) dx \pm \int_a^b g(x) dx \\ \int_a^b r \cdot f(x) dx &= r \cdot \int_a^b f(x) dx\end{aligned}$$

Jeżeli $a < b$ oraz dla każdego $x \in [a, b]$ zachodzi nierówność $f(x) \leq g(x)$, to:

$$\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$$

Obejrzyj w internecie wykład doc. Górniaka z PWr:

Odcinek **72**: Wzór Newtona - Leibnitza² - podstawowy algorytm obliczania całek oznaczonych

²Naprawdę chodzi o Leibniza (bez **t**), ale podaję tytuł wykładu tak, jak pojawia się w spisie treści.

Lista zadań do rozwiązania (na jutro !!!)

Zapisz swoje odpowiedzi i sprawdź jutro, czy są poprawne.

Przy tej i każdej innej liście zadań możesz otrzymać pomoc na wirtualnych ćwiczeniach i konsultacjach³.

W każdym z poniższych 21 zadań podaj w postaci uproszczonej wartość całki oznaczonej. **Wskazówka:** W niektórych zadaniach lepiej nie całkować bezpośrednio, tylko narysować odpowiednią figurę i obliczyć jej pole.

$$121. \int_{2017}^{2020} 7 \, dx$$

$$122. \int_0^3 x^2 \, dx$$

$$123. \int_0^2 x^3 \, dx$$

$$124. \int_0^1 x^{10} \, dx$$

$$125. \int_1^4 \sqrt{x} \, dx$$

$$126. \int_1^{27} \sqrt[3]{x} \, dx$$

$$127. \int_{-2}^{10} |x| \, dx$$

$$128. \int_1^3 \frac{dx}{x}$$

$$129. \int_1^3 \frac{dx}{x+1}$$

$$130. \int_1^7 \frac{dx}{x+2}$$

$$131. \int_0^1 \frac{dx}{x^2+1}$$

$$132. \int_0^{\sqrt{3}} \frac{dx}{x^2+1}$$

$$133. \int_1^{\sqrt{3}} \frac{dx}{x^2+1}$$

$$134. \int_0^{1/\sqrt{3}} \frac{dx}{x^2+1}$$

$$135. \int_{1/\sqrt{3}}^1 \frac{dx}{x^2+1}$$

$$136. \int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} \, dx$$

$$137. \int_0^1 \sqrt{1-x^2} \, dx$$

$$138. \int_{-1}^0 \sqrt{1-x^2} \, dx$$

$$139. \int_{-2}^2 \sqrt{4-x^2} \, dx$$

$$140. \int_0^2 \sqrt{4-x^2} \, dx$$

$$141. \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \sqrt{2-x^2} \, dx$$

³W czasie, gdy piszę te słowa, nie mam jeszcze pełnej jasności jaka będzie forma ćwiczeń i konsultacji. Na pewno możesz w dowolnym momencie napisać emaila do każdego z prowadzących. Będzie też pewnie działać jakieś forum na Moodlu, może coś jeszcze...