

Dzień 3 (środa 18 marca 2020)

Porównaj swoje odpowiedzi do wczorajszych zadań z odpowiedziami podanymi poniżej.

W zadaniach **136–141** należało zinterpretować całkę jako pole pewnego półkola lub ćwierćkola.

W każdym z poniższych 21 zadań podaj w postaci uproszczonej wartość całki oznaczonej. **Wskazówka:** W niektórych zadaniach lepiej nie całkować bezpośrednio, tylko narysować odpowiednią figurę i obliczyć jej pole.

$$121. \int_{2017}^{2020} 7 \, dx = 21 \quad 122. \int_0^3 x^2 \, dx = 9 \quad 123. \int_0^2 x^3 \, dx = 4 \quad 124. \int_0^1 x^{10} \, dx = 1/11$$

$$125. \int_1^4 \sqrt{x} \, dx = 14/3 \quad 126. \int_1^{27} \sqrt[3]{x} \, dx = 60 \quad 127. \int_{-2}^{10} |x| \, dx = 52 \quad 128. \int_1^3 \frac{dx}{x} = \ln 3$$

$$129. \int_1^3 \frac{dx}{x+1} = \ln 2 \quad 130. \int_1^7 \frac{dx}{x+2} = \ln 3 \quad 131. \int_0^1 \frac{dx}{x^2+1} = \frac{\pi}{4} \quad 132. \int_0^{\sqrt{3}} \frac{dx}{x^2+1} = \frac{\pi}{3}$$

$$133. \int_1^{\sqrt{3}} \frac{dx}{x^2+1} = \frac{\pi}{12} \quad 134. \int_0^{1/\sqrt{3}} \frac{dx}{x^2+1} = \frac{\pi}{6} \quad 135. \int_{1/\sqrt{3}}^1 \frac{dx}{x^2+1} = \frac{\pi}{12}$$

$$136. \int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} \, dx = \frac{\pi}{2} \quad 137. \int_0^1 \sqrt{1-x^2} \, dx = \frac{\pi}{4} \quad 138. \int_{-1}^0 \sqrt{1-x^2} \, dx = \frac{\pi}{4}$$

$$139. \int_{-2}^2 \sqrt{4-x^2} \, dx = 2\pi \quad 140. \int_0^2 \sqrt{4-x^2} \, dx = \pi \quad 141. \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \sqrt{2-x^2} \, dx = \pi$$

Całkowanie przez części w całce oznaczonej

A teraz wyjaśnimy sobie, jak w całce oznaczonej całkować przez części. Ktoś powie: A co tu wyjaśniać? Przecież jak umiemy obliczać całki nieoznaczone i mamy prosty wzór wyrażający całkę oznaczoną jako przyrost funkcji pierwotnej, to czego nam więcej trzeba? Ano popatrzmy na taki przykład:

Przykład: Obliczyć całkę $\int_1^2 x^3 \cdot e^x dx$.

Aby obliczyć tę całkę, trzeba trzykrotnie całkować przez części. Na boku¹ obliczymy całkę nieoznaczoną, a potem wykorzystamy otrzymaną funkcję pierwotną do obliczenia całki oznaczonej:

$$\begin{aligned} \int x^3 \cdot e^x dx &= \\ &= x^3 \cdot e^x - 3 \cdot \int x^2 \cdot e^x dx = \\ &= x^3 \cdot e^x - 3 \cdot x^2 \cdot e^x + 6 \cdot \int x \cdot e^x dx = \\ &= x^3 \cdot e^x - 3 \cdot x^2 \cdot e^x + 6 \cdot x \cdot e^x - 6 \cdot \int e^x dx = \\ &= x^3 \cdot e^x - 3 \cdot x^2 \cdot e^x + 6 \cdot x \cdot e^x - 6 \cdot e^x + C. \end{aligned}$$

Wobec tego:

$$\begin{aligned} \int_1^2 x^3 \cdot e^x dx &= \left(x^3 \cdot e^x - 3 \cdot x^2 \cdot e^x + 6 \cdot x \cdot e^x - 6 \cdot e^x \right) \Big|_{x=1}^2 = \\ &= (8 \cdot e^2 - 12 \cdot e^2 + 12 \cdot e^2 - 6 \cdot e^2) - (e - 3 \cdot e + 6 \cdot e - 6 \cdot e) = 2 \cdot e^2 + 2 \cdot e. \end{aligned}$$

Wyszło, ale widać w tym pewne niedogodności. Po pierwsze, trzeba obliczać całkę nieoznaczoną na boku. Po drugie, licząc tę całkę, przy kolejnych całkowaniach przez części trzeba pracować przepisując kawałek funkcji pierwotnej, którego dokładna postać i tak nam nie jest do niczego potrzebna, bo interesuje nas tylko jej przyrost.

Można jednym ciągiem przeprowadzić rachunek z całkowaniem przez części w wersji dla całki oznaczonej, obliczając na bieżąco przyrosty fragmentów funkcji pierwotnej pojawiających się w trakcie kolejnych całkowań przez części. Wówczas rozważany przykład można rozwiązać następująco:

$$\begin{aligned} \int_1^2 x^3 \cdot e^x dx &= x^3 \cdot e^x \Big|_{x=1}^2 - 3 \cdot \int_1^2 x^2 \cdot e^x dx = 8e^2 - e - 3 \cdot \left(x^2 \cdot e^x \Big|_{x=1}^2 \right) + 6 \cdot \int_1^2 x \cdot e^x dx = \\ &= 8e^2 - e - 3 \cdot (4e^2 - e) + 6 \cdot \left(x \cdot e^x \Big|_{x=1}^2 \right) - 6 \cdot \int_1^2 e^x dx = -4e^2 + 2e + 6 \cdot (2e^2 - e) - 6 \cdot \left(e^x \Big|_{x=1}^2 \right) = \\ &= 8e^2 - 4e - 6 \cdot (e^2 - e) = 2e^2 + 2e. \end{aligned}$$

¹Akurat w tym wypadku "na boku" oznacza "poniżej".

A oto inny przykład:

Przykład: Obliczyć całkę $\int_0^{\pi} \sin x \cdot e^x dx$.

Sama strategia całkowania jest taka sama jak w całce nieoznaczonej. Tutaj strategia mówi: Scałkuj dwukrotnie przez części, wrócisz do wyjściowej całki, ale ze współczynnikiem innym niż 1, ułóż i rozwiąż powstałe w ten sposób równanie. No to całkujemy różniczkując sinusa, a całkując e^x . Pamiętajmy przy tym, że szukana całka w tym wypadku jest liczbą, oznaczmy ją przez I . Otrzymujemy

$$I = \int_0^{\pi} \sin x \cdot e^x dx = \underbrace{\sin x \cdot e^x \Big|_{x=0}^{\pi}}_{=0} - \underbrace{\int_0^{\pi} \cos x \cdot e^x dx}_{=e^{\pi}+1} = -\underbrace{\cos x \cdot e^x \Big|_{x=0}^{\pi}}_{=e^{\pi}+1} - \underbrace{\int_0^{\pi} \sin x \cdot e^x dx}_{=I} = e^{\pi} + 1 - I,$$

co prowadzi do równania

$$I = e^{\pi} + 1 - I,$$

a to daje

$$I = \frac{e^{\pi} + 1}{2}.$$

Wobec tego

$$\int_0^{\pi} \sin x \cdot e^x dx = \frac{e^{\pi} + 1}{2}.$$

Zadania do rozwiązania

Uwaga: Pomimo iż dziś pisałem o całkowaniu przez części, nie wszystkie zadania wymagają całkowania przez części.

142. Obliczyć wartość całki oznaczonej $\int_0^{\sqrt{3}} \arctg x dx$. Pamiętać o uproszczeniu wyniku.

Zanim zajrzysz na kolejną stronę, rozwiąż powyższe zadanie, a przynajmniej podejmij próbę rozwiązania, aby wiedzieć, gdzie napotykasz trudności.

Rozwiązanie:

Dopisujemy czynnik 1 i całkujemy przez części:

$$\begin{aligned}\int_0^{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} x \, dx &= \int_0^{\sqrt{3}} 1 \cdot \operatorname{arctg} x \, dx = x \cdot \operatorname{arctg} x \Big|_{x=0}^{\sqrt{3}} - \int_0^{\sqrt{3}} x \cdot \frac{1}{x^2+1} \, dx = \\ &= \sqrt{3} \cdot \operatorname{arctg} \sqrt{3} - 0 \cdot \operatorname{arctg} 0 - \left(\frac{\ln(x^2+1)}{2} \Big|_{x=0}^{\sqrt{3}} \right) = \sqrt{3} \cdot \frac{\pi}{3} - \left(\frac{\ln 4}{2} - \frac{\ln 1}{2} \right) = \frac{\pi}{\sqrt{3}} - \ln 2.\end{aligned}$$

Odpowiedź: Wartość podanej całki oznaczonej jest równa $\frac{\pi}{\sqrt{3}} - \ln 2$.

143. Obliczyć całkę oznaczoną

$$\int_1^{25} \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt{x+24}}.$$

Zanim zajrzysz na kolejną stronę, rozwiąż powyższe zadanie, a przynajmniej podejmij próbę rozwiązania, aby wiedzieć, gdzie napotykasz trudności.

Rozwiązanie:

Po skorzystaniu ze wzoru na różnicę kwadratów otrzymujemy

$$\begin{aligned}\int_1^{25} \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt{x+24}} &= \int_1^{25} \frac{\sqrt{x+24} - \sqrt{x}}{24} dx = \frac{1}{24} \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot (x+24)^{3/2} - \frac{2}{3} \cdot x^{3/2} \right) \Bigg|_{x=1}^{25} = \\ &= \frac{1}{36} \cdot \left((x+24)^{3/2} - x^{3/2} \right) \Bigg|_{x=1}^{25} = \frac{1}{36} \cdot (343 - 125 - 125 + 1) = \frac{94}{36} = \frac{47}{18}.\end{aligned}$$

144. Udowodnić nierówność

$$\int_{1/4}^{1/2} x^{2x} dx < \frac{1}{8}.$$

Zanim zajrzysz na kolejną stronę, rozwiąż powyższe zadanie, a przynajmniej podejmij próbę rozwiązania, aby wiedzieć, gdzie napotykasz trudności.

Rozwiązanie:

Pochodna funkcji podcałkowej $f(x) = x^{2x}$ dana jest wzorem

$$f'(x) = \frac{d}{dx} x^{2x} = \frac{d}{dx} e^{2x \cdot \ln x} = e^{2x \cdot \ln x} \cdot \frac{d}{dx} (2x \cdot \ln x) = x^{2x} \cdot (2 \cdot \ln x + 2) = 2 \cdot x^{2x} \cdot (\ln x + 1).$$

Ponieważ $f'(x) > 0$ dla $x > 1/e$ oraz $f'(x) < 0$ dla $0 < x < 1/e$, funkcja f jest malejąca w przedziale $(0, 1/e)$ i rosnąca w przedziale $(1/e, +\infty)$. Zauważmy ponadto, że

$$f(1/4) = 1/2$$

oraz

$$f(1/2) = 1/2.$$

Wobec tego $f(x) < 1/2$ dla $x \in (1/4, 1/2)$, skąd

$$\int_{1/4}^{1/2} x^{2x} dx < \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} \right) \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}.$$

Uwaga: Obliczenia komputerowe pokazują, że dana w zadaniu całka ma wartość w przybliżeniu 0,1215. Wydaje się to być zbyt bliskie oszacowaniu $1/8 = 0,125$, aby zadziałały inne metody szacowania (zapewne obarczone większym błędem).

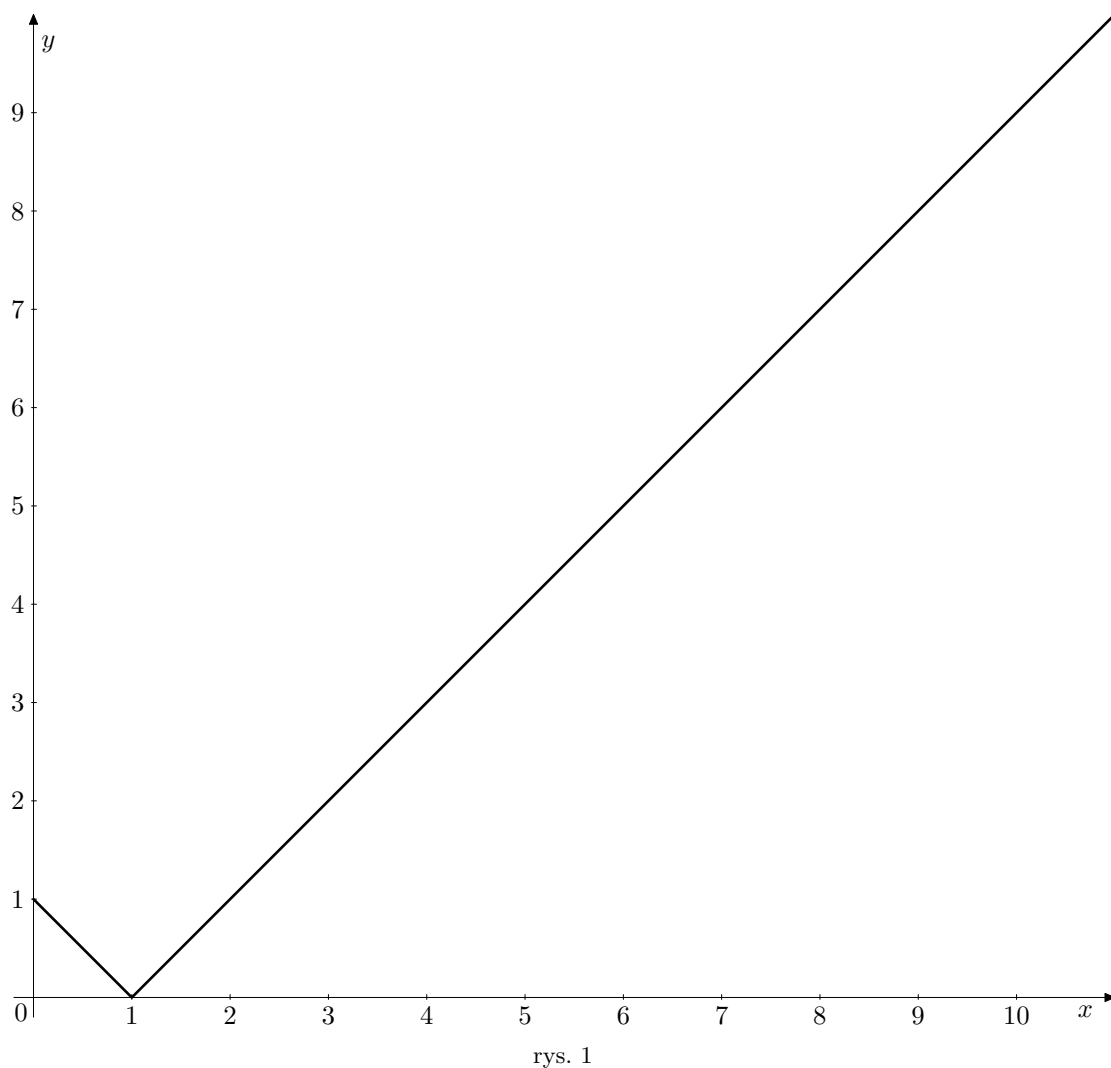
145. Niech $f_1(x) = \sqrt{x^2 - 2x + 1}$ oraz $f_{n+1}(x) = f_1(f_n(x))$. Obliczyć wartość całki oznaczonej

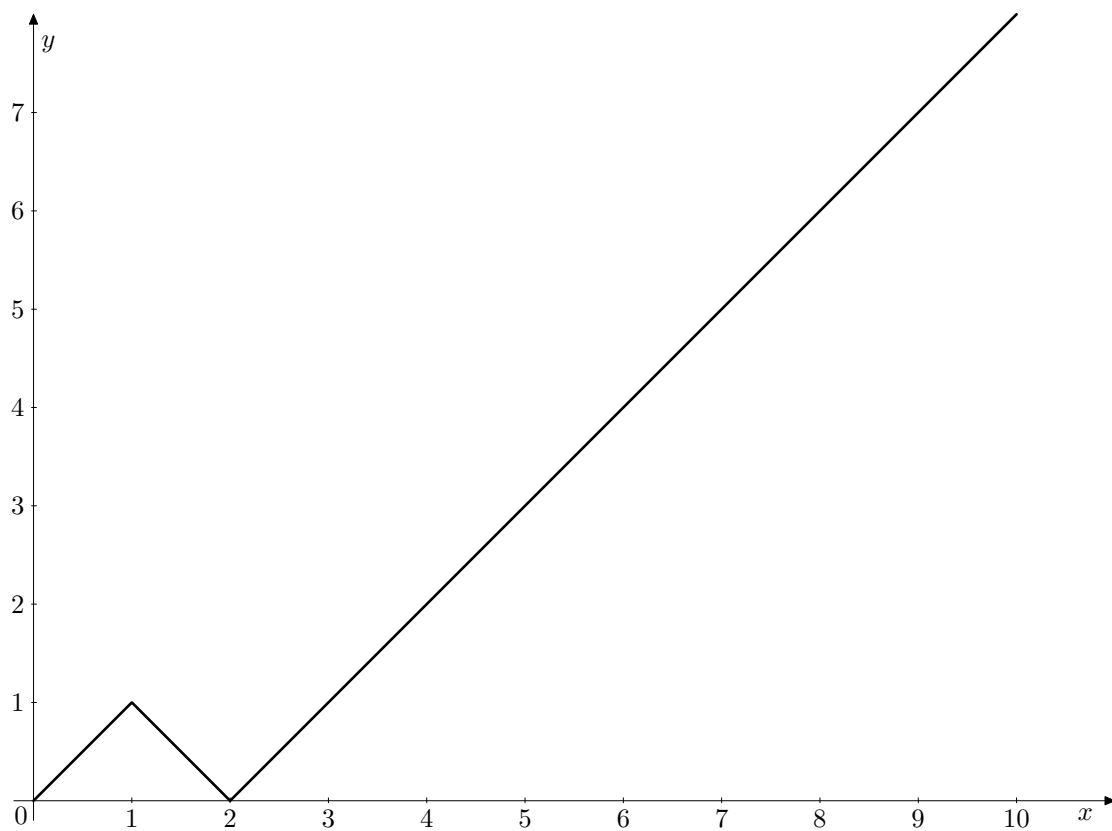
$$\int_0^{10} f_5(x) dx.$$

Zanim zajrzysz na kolejną stronę, rozwiąż powyższe zadanie, a przynajmniej podejmij próbę rozwiązania, aby wiedzieć, gdzie napotykasz trudności.

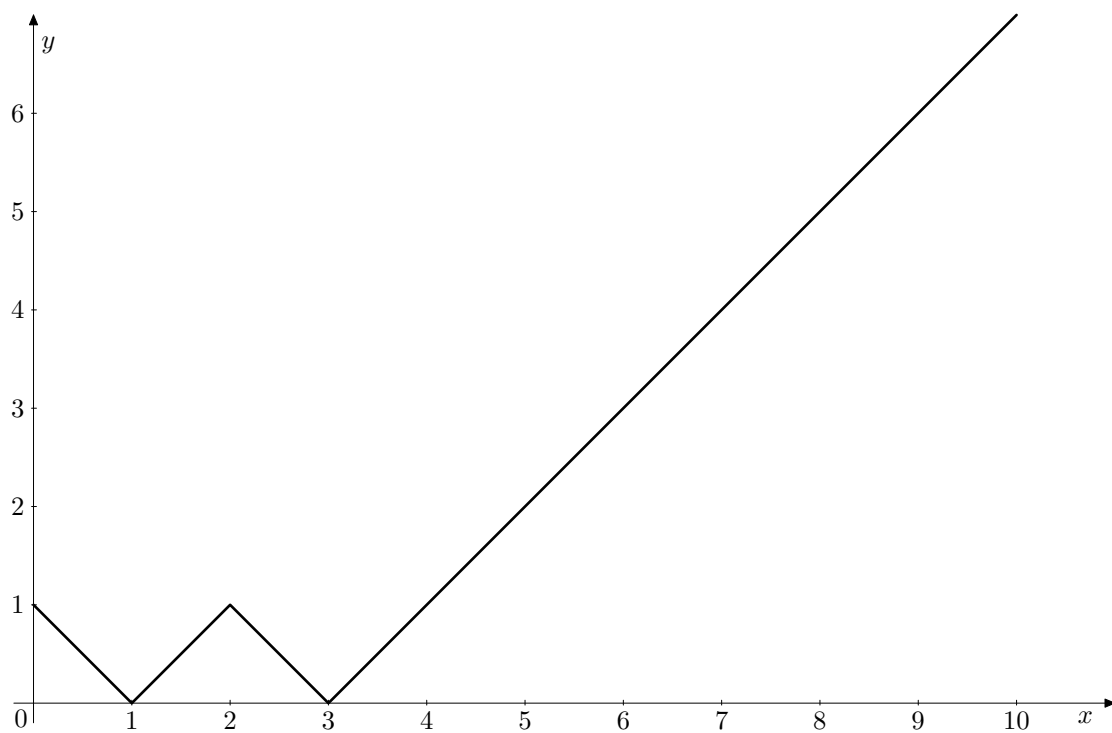
Rozwiązanie:

Zauważmy, że $f_1(x) = |x-1|$. W związku z tym wykres funkcji $f_1 \circ g$ powstaje z wykresu funkcji g przez przesunięcie tegoż wykresu w dół o 1 oraz symetryczne odbicie części wykresu, która znalazła się pod osią OX . Wykresy funkcji od f_1 do f_5 znajdują się odpowiednio na rysunkach od 1 do 5.

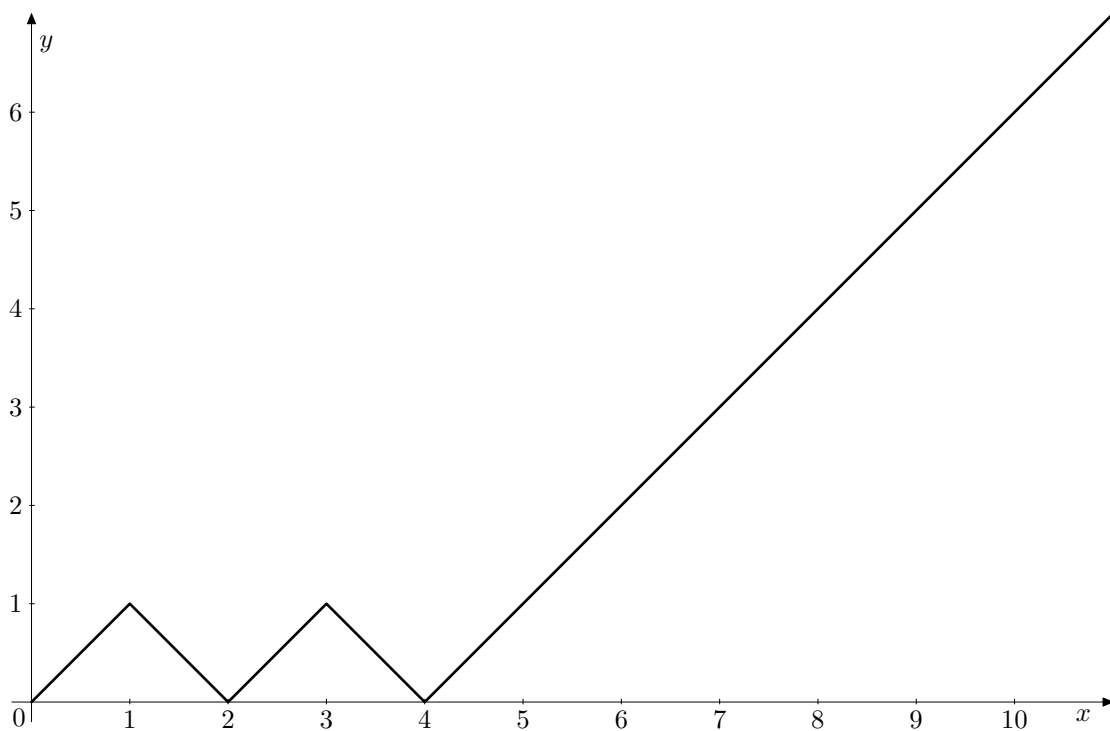




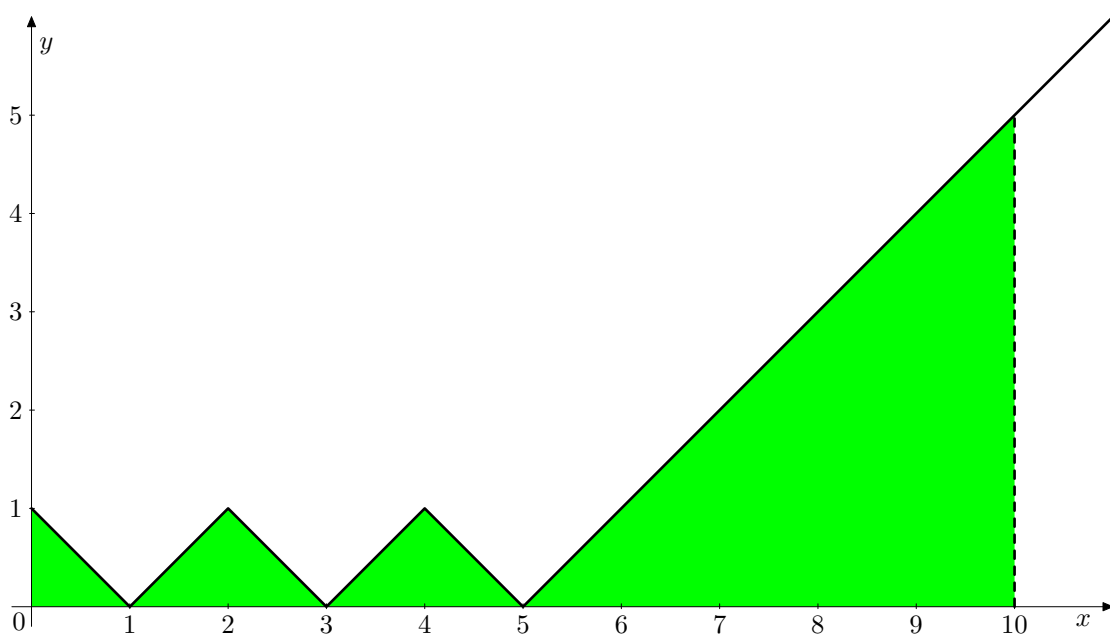
rys. 2



rys. 3



rys. 4



rys. 5

Szukana wartość całki oznaczonej jest równa polu zielonej figury z rysunku 5. Pole to wyliczamy sumując pola trójkątów, które się na nie składają:

$$\frac{1}{2} + 1 + 1 + \frac{25}{2} = 15.$$

Odpowiedź: Wartość podanej całki oznaczonej jest równa 15.