

Dzień 4 (czwartek 19 marca 2020)**Całkowanie przez podstawienie w całce oznaczonej**

Dziś zaczniemy od następującego przykładu:

Przykład: Obliczyć całkę $\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2 + 2x + 5}$.

Nasza dotychczasowa wiedza pozwala na przyjęcie następującej strategii:

- Obliczymy na boku całkę nieoznaczoną, a następnie wyliczymy przyrost funkcji pierwotnej.
- W celu obliczenia całki nieoznaczonej najpierw wykonamy podstawienie, aby w trójkątnym kwadratowym w mianowniku funkcji podcałkowej pozbyć się składnika liniowego $2x$.
- Potem wykonamy drugie podstawienie, aby wyraz wolny w mianowniku stał się równy 1.
- Obliczymy całkę w trzeciej zmiennej, to będzie pewnie jakiś arcus tangens.
- Wrócimy z wynikiem do drugiej zmiennej.
- Wrócimy z wynikiem do pierwszej zmiennej.
- Obliczymy przyrost funkcji pierwotnej na przedziale całkowania.

Zanim zajrzysz na kolejną stronę, spróbuj samodzielnie obliczyć całkę według powyższego przepisu.

No to do roboty:

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x^2+2x+5} &= \int \frac{dx}{(x+1)^2+4} = && \text{Podstawienie: } y=x+1, \quad x=y-1, \quad dx=dy \\ &= \int \frac{dy}{y^2+4} = \int \frac{dy}{4 \cdot \left(\frac{y}{2}\right)^2+4} = && \text{Podstawienie: } t=\frac{y}{2}, \quad y=2t, \quad dy=2dt \\ &= \int \frac{2dt}{4t^2+4} = \frac{1}{2} \cdot \int \frac{dt}{t^2+1} = \frac{1}{2} \cdot \operatorname{arctg} t + C = \frac{1}{2} \cdot \operatorname{arctg} \frac{y}{2} + C = \frac{1}{2} \cdot \operatorname{arctg} \frac{x+1}{2} + C. \end{aligned}$$

Skoro obliczyliśmy już całkę nieoznaczoną, to obliczenie oznaczonej jest prościutkie:

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2+2x+5} &= \frac{1}{2} \cdot \operatorname{arctg} \frac{x+1}{2} \Big|_{x=-1}^1 = \frac{1}{2} \cdot \operatorname{arctg} \frac{1+1}{2} - \frac{1}{2} \cdot \operatorname{arctg} \frac{-1+1}{2} = \frac{1}{2} \cdot \operatorname{arctg} 1 - \frac{1}{2} \cdot \operatorname{arctg} 0 = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \cdot 0 = \frac{\pi}{8}. \end{aligned}$$

Wyszło, ale superwygodna metoda zapisu to to nie jest. O wiele krócej będzie wykonywać **podstawienie w całce oznaczonej**.

A jaki jest wzór/procedura wykonywania takiego podstawienia? Wzór jest jeden, ale ma on dwa oblicza. Zaczniemy od oblicza bezmyślnie formalistycznego. W tym celu opiszmy ogólną sytuację pojedynczego całkowania przez podstawienie.

Przypomnijmy, że w całce nieoznaczonej całkowanie przez podstawienie bierze się ze wzoru na pochodną złożenia funkcji:

$$\frac{d}{dx} F(g(x)) = F'(g(x)) \cdot g'(x) = f(g(x)) \cdot g'(x), \quad \text{przyjmujemy } f = F'$$

który można przepisać jako

$$\int f(g(x)) \cdot g'(x) dx = F(g(x)) + C.$$

Samo podstawienie zapisujemy jako $y=g(x)$ z formalnym wzorem $dy=g'(x)dx$ i w konsekwencji sprowadzamy całkowanie do znalezienia funkcji pierwotnej funkcji f . W przyjętym zapisie podstawienie i powrót do starej zmiennej wyglądają tak:

$$\int f(g(x)) \cdot g'(x) dx = \int f(y) dy = F(y) + C = F(g(x)) + C.$$

Gdybyśmy chcieli obliczyć odpowiednią całkę oznaczoną, to wyglądałoby to mniej więcej tak:

$$\int_a^b f(g(x)) \cdot g'(x) dx = F(g(x)) \Big|_{x=a}^b = F(g(b)) - F(g(a)).$$

Zauważmy, że wynik jakiego oczekujemy, jest przyrostem funkcji F od $g(a)$ do $g(b)$. Ten sam efekt uzyskamy wykonując obliczenia na całkach oznaczonych, jednak przy podstawieniu musimy odpowiednio zmienić granice całkowania. Całka po x , które zmienia się w przedziale od a do b , zamieni się na całkę po y zmieniającym się w przedziale¹ od $g(a)$ do $g(b)$.

¹Przy chwilowym założeniu, że funkcja g jest rosnąca na przedziale $[a, b]$.

W rozważanym przykładzie podstawienie w całce oznaczonej będzie wyglądać następująco:

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2+2x+5} &= \int_{-1}^1 \frac{dx}{(x+1)^2+4} = && \text{Podstawienie: } y = x+1, \quad x = y-1, \quad dx = dy \\ &= \int_0^2 \frac{dy}{y^2+4} = \int_0^2 \frac{dy}{4 \cdot \left(\frac{y}{2}\right)^2+4} = && \text{Podstawienie: } t = \frac{y}{2}, \quad y = 2t, \quad dy = 2dt \\ &= \int_0^1 \frac{2dt}{4t^2+4} = \frac{1}{2} \cdot \int_0^1 \frac{dt}{t^2+1} = \frac{1}{2} \cdot \arctg t \Big|_{t=0}^1 = \frac{1}{2} \cdot \arctg 1 - \frac{1}{2} \cdot \arctg 0 = \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \cdot 0 = \frac{\pi}{8}. \end{aligned}$$

Przy każdym podstawieniu zmieniamy w odpowiedni sposób granice całkowania: x 'owi przebiegającemu przedział $[-1, 1]$ odpowiada y przebiegający przedział $[0, 2]$, a temu z kolei odpowiada t przebiegające przedział $[0, 1]$.

Zauważmy, że po każdym podstawieniu możemy zapomnieć o starej zmiennej². Całka oznaczona jest bowiem liczbą rzeczywistą, a podstawienie sprawia, że liczba ta zamiast być wyrażoną przez całkę w starej zmiennej, zostaje wyrażona jako całka w nowej zmiennej.

Trzeba do tego dodać jeszcze, że w podstawieniu $y = g(x)$ prowadzącym do

$$\int_a^b f(g(x)) \cdot g'(x) dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(y) dy$$

funkcja g musi być ściśle monotoniczna³ na przedziale $[a, b]$. Nie musi być rosnąca, może być malejąca, ale wtedy po podstawieniu górna granica całkowania będzie mniejsza od dolnej – takiego cudenka jeszcze na tym wykładzie nie oglądaliśmy. Nic nie szkodzi, albowiem wzór/umowa na taką okoliczność jest bardzo prosta: **W całce oznaczonej można zamienić kolejność granic całkowania zmieniając znak całki**. Oczywiście dla porządku staramy się, aby dolna granica była mniejsza od górnej, ale jak w ferworze rachunków będzie na odwrót, to nie ma najmniejszego powodu wpadać w panikę.

Przedstawione wyżej formalne oblicze podstawienia w całce oznaczonej na razie wystarczy, aby obliczać całki. O drugim, geometrycznym obliczu tego podstawienia, opowiem Wam jutro.

Zadania do rozwiązania

146. Obliczyć wartość całki oznaczonej $\int_{-2}^2 \frac{x dx}{x^2+2x+4}$.

Zanim zajrzysz na kolejną stronę, rozwiąż powyższe zadanie, a przynajmniej podejmij próbę rozwiązania, aby wiedzieć, gdzie napotykasz trudności.

²W kontraście do całki nieoznaczonej, która jest funkcją (czy dokładniej: rodziną funkcji) zależną od tej zmiennej, która była użyta w wyjściowej całce. Musimy więc na koniec do tej wyjściowej zmiennej powrócić.

³Musi być też różniczkowalna, ale to chyba w tym kontekście oczywista oczywistość.

Rozwiązanie:

Przekształcamy mianownik funkcji podcałkowej

$$\int_{-2}^2 \frac{x dx}{x^2 + 2x + 4} = \int_{-2}^2 \frac{x dx}{x^2 + 2x + 1 + 3} = \int_{-2}^2 \frac{x dx}{(x+1)^2 + 3} = \int_{-2}^2 \frac{x dx}{3 \cdot \left(\frac{x+1}{\sqrt{3}}\right)^2 + 3},$$

a następnie wykonujemy podstawienie

$$t = \frac{x+1}{\sqrt{3}}, \quad x = t \cdot \sqrt{3} - 1$$

i formalnie

$$dx = \sqrt{3} dt.$$

Ponadto $x = -2$ odpowiada $t = -1/\sqrt{3}$, a $x = 2$ odpowiada $t = \sqrt{3}$, przy czym zależność t od x jest monotoniczna. Stąd wynika, że przedział całkowania $x \in [-2, 2]$ odpowiada przedziałowi $t \in [-1/\sqrt{3}, \sqrt{3}]$.

Otrzymujemy

$$\begin{aligned} \int_{-2}^2 \frac{x dx}{3 \cdot \left(\frac{x+1}{\sqrt{3}}\right)^2 + 3} &= \int_{-1/\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \frac{(t \cdot \sqrt{3} - 1) \cdot \sqrt{3} dt}{3 \cdot t^2 + 3} = \int_{-1/\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \frac{t dt}{t^2 + 1} - \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \int_{-1/\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \frac{dt}{t^2 + 1} = \\ &= \left(\frac{\ln(t^2 + 1)}{2} \right) \Big|_{t=-1/\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \left(\operatorname{arctg} t \right) \Big|_{t=-1/\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} = \\ &= \frac{\ln 4}{2} - \frac{\ln(4/3)}{2} - \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \left(\operatorname{arctg} \sqrt{3} - \operatorname{arctg} \left(-\frac{1}{\sqrt{3}} \right) \right) = \frac{\ln 3}{2} - \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \left(\frac{\pi}{3} - \frac{-\pi}{6} \right) = \\ &= \frac{\ln 3}{2} - \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\ln 3}{2} - \frac{\pi}{2\sqrt{3}}. \end{aligned}$$

Odpowiedź: Podana całka oznaczona ma wartość $\frac{\ln 3}{2} - \frac{\pi}{2\sqrt{3}}$.

Uwaga: W prawidłowo uproszczonym wyniku nie może pojawić się **arctg**, a π oraz **ln** mogą wystąpić tylko raz.

147. Obliczyć wartość całki oznaczonej $\int_{-2}^8 \frac{dx}{1 + \sqrt[4]{x^2 + 2x + 1}}$.

Zanim zajrzysz na kolejną stronę, rozwiąż powyższe zadanie, a przynajmniej podejmij próbę rozwiązania, aby wiedzieć, gdzie napotykasz trudności.

Rozwiązanie:

Przekształcamy mianownik funkcji podcałkowej, a następnie dzielimy przedział całkowania na dwa przedziały:

$$\begin{aligned} \int_{-2}^8 \frac{dx}{1 + \sqrt[4]{x^2 + 2x + 1}} &= \int_{-2}^8 \frac{dx}{1 + \sqrt[4]{(x+1)^2}} = \int_{-2}^8 \frac{dx}{1 + \sqrt{|x+1|}} = \\ &= \int_{-2}^{-1} \frac{dx}{1 + \sqrt{|x+1|}} + \int_{-1}^8 \frac{dx}{1 + \sqrt{|x+1|}} = \int_{-2}^{-1} \frac{dx}{1 + \sqrt{-x-1}} + \int_{-1}^8 \frac{dx}{1 + \sqrt{x+1}}. \end{aligned} \quad (\spadesuit)$$

W pierwszej całce ostatniej sumy wzoru $(\spadesuit)$ wykonujemy podstawienie

$$t = \sqrt{-x-1}, \quad t^2 = -x-1, \quad t \geq 0, \quad x = -t^2 - 1, \quad t \geq 0$$

i formalnie

$$dx = -2t dt.$$

Ponadto $x = -2$ odpowiada $t = 1$, a $x = -1$ odpowiada $t = 0$, przy czym zależność t od x jest monotoniczna. Stąd wynika, że przedział całkowania $x \in [-2, -1]$ odpowiada przedziałowi $t \in [0, 1]$.

Otrzymujemy

$$\begin{aligned} \int_{-2}^{-1} \frac{dx}{1 + \sqrt{-x-1}} &= \int_1^0 \frac{-2t dt}{1+t} = -2 \cdot \int_1^0 \frac{t dt}{1+t} = 2 \cdot \int_0^1 \frac{t+1-1}{1+t} dt = 2 \cdot \int_0^1 1 - \frac{1}{1+t} dt = \\ &= 2 \cdot \int_0^1 dt - 2 \cdot \int_0^1 \frac{dt}{1+t} = 2 - 2 \cdot \left(\ln|1+t| \Big|_{t=0}^1 \right) = 2 - 2 \cdot (\ln 2 - \ln 1) = 2 - 2 \cdot \ln 2. \end{aligned}$$

Z kolei w drugiej całce ostatniej sumy wzoru $(\spadesuit)$ wykonujemy podstawienie

$$t = \sqrt{x+1}, \quad t^2 = x+1, \quad t \geq 0, \quad x = t^2 - 1, \quad t \geq 0$$

i formalnie

$$dx = 2t dt.$$

Ponadto $x = -1$ odpowiada $t = 0$, a $x = 8$ odpowiada $t = 3$, przy czym zależność t od x jest monotoniczna. Stąd wynika, że przedział całkowania $x \in [-1, 8]$ odpowiada przedziałowi $t \in [0, 3]$.

Otrzymujemy

$$\begin{aligned} \int_{-1}^8 \frac{dx}{1 + \sqrt{x+1}} &= \int_0^3 \frac{2t dt}{1+t} = 2 \cdot \int_0^3 \frac{t dt}{1+t} = 2 \cdot \int_0^3 \frac{t+1-1}{1+t} dt = 2 \cdot \int_0^3 1 - \frac{1}{1+t} dt = \\ &= 2 \cdot \int_0^3 dt - 2 \cdot \int_0^3 \frac{dt}{1+t} = 6 - 2 \cdot \left(\ln|1+t| \Big|_{t=0}^3 \right) = 6 - 2 \cdot (\ln 4 - \ln 1) = 6 - 4 \cdot \ln 2. \end{aligned}$$

Odpowiedź: Podana całka oznaczona ma wartość $8 - 6 \cdot \ln 2$.

Uwaga: W prawidłowo uproszczonym wyniku **ln** może wystąpić tylko raz.

148. Obliczyć całkę oznaczoną

$$\int_1^3 \frac{x+1}{x^4+3x^2} dx.$$

Uprościć wynik doprowadzając go do postaci, która nie zawiera symbolu "arctg" i zawiera co najwyżej jeden symbol "ln".

Zanim zajrzysz na kolejną stronę, rozwiąż powyższe zadanie, a przynajmniej podejmij próbę rozwiązania, aby wiedzieć, gdzie napotykasz trudności.

Rozwiązanie:

Rozkładamy funkcję podcałkową na ułamki proste⁴:

$$\begin{aligned}\frac{x+1}{(x^2+3)\cdot x^2} &= \frac{Ax+B}{x^2+3} + \frac{C}{x} + \frac{D}{x^2}, \\ x+1 &= (Ax+B)\cdot x^2 + C\cdot(x^2+3) + D\cdot(x^2+3), \\ x+1 &= Ax^3 + Bx^2 + Cx^3 + 3Cx + Dx^2 + 3D, \\ \begin{cases} 0 &= A+C, \\ 0 &= B+D, \\ 1 &= 3C, \\ 1 &= 3D, \end{cases} \\ \begin{cases} C=D=1/3, \\ A=B=-1/3, \end{cases}\end{aligned}$$

Wobec tego

$$\begin{aligned}\int_1^3 \frac{x+1}{x^4+3x^2} dx &= \frac{1}{3} \cdot \int_1^3 -\frac{x}{x^2+3} - \frac{1}{x^2+3} + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} dx = \\ &= \frac{1}{3} \cdot \int_1^3 -\frac{x}{x^2+3} + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} dx - \frac{1}{3} \cdot \int_1^3 \frac{1}{x^2+3} dx.\end{aligned}$$

Obliczamy każdą z dwóch powyższych całek z osobna. W pierwszej całce otrzymujemy

$$\begin{aligned}\int_1^3 -\frac{x}{x^2+3} + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} dx &= -\frac{\ln(x^2+3)}{2} + \ln|x| - \frac{1}{x} \Big|_{x=1}^3 = \\ &= -\frac{\ln 12}{2} + \ln 3 - \frac{1}{3} + \frac{\ln 4}{2} - \ln 1 + \frac{1}{1} = \frac{2}{3} + \frac{\ln 3}{2},\end{aligned}$$

a po podstawieniu $x = t\sqrt{3}$, $t = x/\sqrt{3}$, $dx = \sqrt{3} dt$ wyliczamy wartość drugiej całki

$$\begin{aligned}\int_1^3 \frac{1}{x^2+3} dx &= \int_{1/\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \frac{\sqrt{3}}{3t^2+3} dt = \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \int_{1/\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \frac{1}{t^2+1} dt = \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \arctgt \Big|_{t=1/\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} = \\ &= \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}\pi}{18}.\end{aligned}$$

Wobec tego dana w zadaniu całka ma wartość

$$\frac{1}{3} \cdot \left(\frac{2}{3} + \frac{\ln 3}{2}\right) - \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}\pi}{18} = \frac{2}{9} + \frac{\ln 3}{6} - \frac{\pi\sqrt{3}}{54}.$$

Odpowiedź: Dana w zadaniu całka ma wartość $\frac{2}{9} + \frac{\ln 3}{6} - \frac{\pi\sqrt{3}}{54}$.

⁴Przy całce nieoznaczonej literka C była zarezerwowana na stałą całkowania, więc unikaliśmy użycia jej jako jednego z szukanych współczynników rozkładu na ułamki proste. Ponieważ tu nie ma ani całki nieoznaczonej, ani stałej całkowania, nie ma powodu, aby literkę C omijać.

149. Obliczyć wartość całki oznaczonej

$$\int_1^3 \frac{x^2 + x - 3}{x^3 + 3x} dx .$$

Pamiętać o uproszczeniu wyniku.

Zanim zajrzysz na kolejną stronę, rozwiąż powyższe zadanie, a przynajmniej podejmij próbę rozwiązania, aby wiedzieć, gdzie napotykasz trudności.

Rozwiązanie:

Rozkładamy funkcję podcałkową na ułamki proste:

$$\frac{x^2+x-3}{x^3+3x} = \frac{x^2+x-3}{x \cdot (x^2+3)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+3},$$

$$x^2+x-3 = Ax^2+3A+Bx+Cx,$$

$$\begin{cases} 1 &= A+B, \\ 1 &= C, \\ -3 &= 3A, \end{cases}$$

skąd

$$A = -1, \quad B = 2, \quad C = 1$$

i w konsekwencji

$$\frac{x^2+x-3}{x \cdot (x^2+3)} = -\frac{1}{x} + \frac{2x+1}{x^2+3}.$$

Kontynuujemy obliczenia wykonując po drodze w jednej z całek podstawienie $x = t\sqrt{3}$, czyli $t = x/\sqrt{3}$ i formalnie $dx = \sqrt{3} dt$:

$$\begin{aligned} \int_1^3 \frac{x^2+x-3}{x^3+3x} dx &= \int_1^3 -\frac{1}{x} + \frac{2x+1}{x^2+3} dx = -\int_1^3 \frac{1}{x} dx + \int_1^3 \frac{2x}{x^2+3} dx + \int_1^3 \frac{1}{x^2+3} dx = \\ &= -\ln x \Big|_{x=1}^3 + \ln(x^2+3) \Big|_{x=1}^3 + \int_{1/\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \frac{\sqrt{3}}{3t^2+3} dt = \\ &= -\ln 3 + \ln 1 + \ln 12 - \ln 4 + \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \operatorname{arctg} t \Big|_{t=1/\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \right) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot (\operatorname{arctg} \sqrt{3} - \operatorname{arctg}(1/\sqrt{3})) = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6} \right) = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6\sqrt{3}}. \end{aligned}$$

Odpowiedź: Wartość podanej całki oznaczonej jest równa $\frac{\pi}{6\sqrt{3}}$.

150. Obliczyć wartość całki oznaczonej $\int_2^{98} \frac{dx}{x + \sqrt{x+2}}$.

Doprowadzić wynik do postaci $w \cdot \ln p$, gdzie p jest liczbą pierwszą, a w liczbą wymierną.

Zanim zajrzysz na kolejną stronę, rozwiąż powyższe zadanie, a przynajmniej podejmij próbę rozwiązania, aby wiedzieć, gdzie napotykasz trudności.

Rozwiązanie:

Wykonujemy podstawienie $t = \sqrt{x+2}$, czyli $x = t^2 - 2$ i formalnie $dx = 2t dt$. Wówczas przy x przebiegającym przedział $[2, 98]$ zmienna t przebiega przedział $[2, 10]$. Otrzymujemy

$$\int_2^{98} \frac{dx}{x + \sqrt{x+2}} = \int_2^{10} \frac{2t dt}{t^2 - 2 + t} = \int_2^{10} \frac{2t dt}{t^2 + t - 2} = \int_2^{10} \frac{2t dt}{(t-1) \cdot (t+2)}.$$

Rozkładamy funkcję podcałkową na ułamki proste:

$$\begin{aligned} \frac{2t}{(t-1) \cdot (t+2)} &= \frac{A}{t-1} + \frac{B}{t+2}, \\ 2t &= A \cdot (t+2) + B \cdot (t-1), \end{aligned}$$

$$\text{dla } t = -2 \quad -4 = B \cdot (-3), \quad \text{skąd } B = 4/3,$$

$$\text{dla } t = 1 \quad 2 = A \cdot 3, \quad \text{skąd } A = 2/3.$$

Kontynuujemy całkowanie (nie piszemy modułu pod znakiem logarytmu, bo argument logarytmu jest dodatni w przedziale całkowania):

$$\begin{aligned} \int_2^{10} \frac{2t dt}{(t-1) \cdot (t+2)} &= \int_2^{10} \frac{2/3}{t-1} + \frac{4/3}{t+2} dt = \frac{2}{3} \cdot \ln(t-1) + \frac{4}{3} \cdot \ln(t+2) \Big|_{t=2}^{10} = \\ &= \frac{2}{3} \cdot \ln 9 + \frac{4}{3} \cdot \ln 12 - \frac{2}{3} \cdot \ln 1 - \frac{4}{3} \cdot \ln 4 = \frac{4}{3} \cdot \ln 3 + \frac{4}{3} \cdot (\ln 4 + \ln 3) - \frac{2}{3} \cdot 0 - \frac{4}{3} \cdot \ln 4 = \frac{8}{3} \cdot \ln 3. \end{aligned}$$

Odpowiedź: Wartość podanej całki oznaczonej jest równa $\frac{8}{3} \cdot \ln 3$.