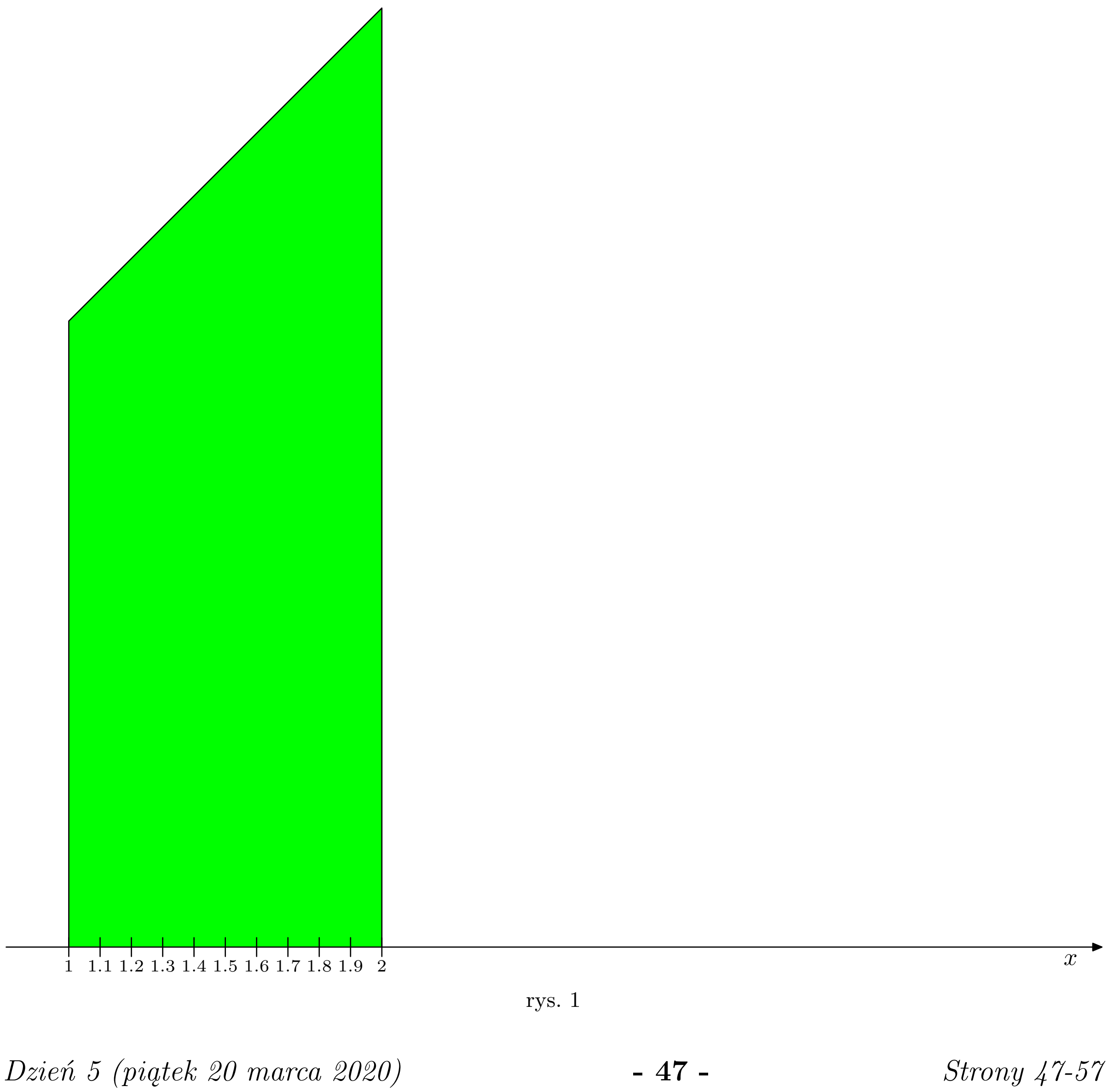
Dzień 5 (piątek 20 marca 2020)

Dziś opowiem Wam o geometrycznym obliczu wzoru na całkowanie przez podstawienie w całce oznaczonej. W zasadzie z punktu widzenia użytkowego nie wnosi to nic nowego, bo formalny wzór poznaliśmy wczoraj, dobrze jednak mieć jakieś intuicje co się liczy i dlaczego, a nie tylko bezmyślnie mielić wzorkami.

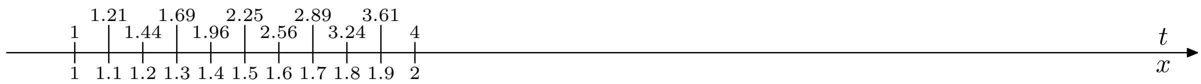
Zapomnijmy na razie o sposobie obliczania całek oznaczonych, traktując całkę oznaczoną tylko i wyłącznie jako pole odpowiedniej figury pod wykresem funkcji podcałkowej.

Wobec tego całka $\int_1^2 x+1\,dx$ jest polem trapezu zamalowanego na zielono na rysunku 1. Pole tego trapezu jest równe $5/2$ i tyleż wynosi wartość tej całki, ale przecież nie o jej wyliczenie w tym momencie chodzi, a o pokazanie mechanizmu całkowania przez podstawienie.



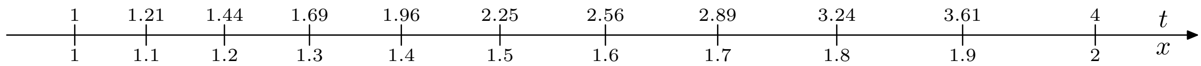
rys. 1

Zapragnijmy teraz wykonać w rozważanej całce podstawienie $t=x^2$, czyli $x=\sqrt{t}$. Co to w praktyce oznacza? Ano tyle, że inaczej chcemy opisać współrzędną poziomą, która teraz jest oznaczona literką x, a za moment będzie oznaczona literką t według przyjętego przed chwilą przelicznika. W zasadzie mógłbym do punktów interesującego mnie przedziału $x\in[1,\,2]$ dopisać odpowiednie wartości $t\in[1,\,4]$ jak na rysunku 2.



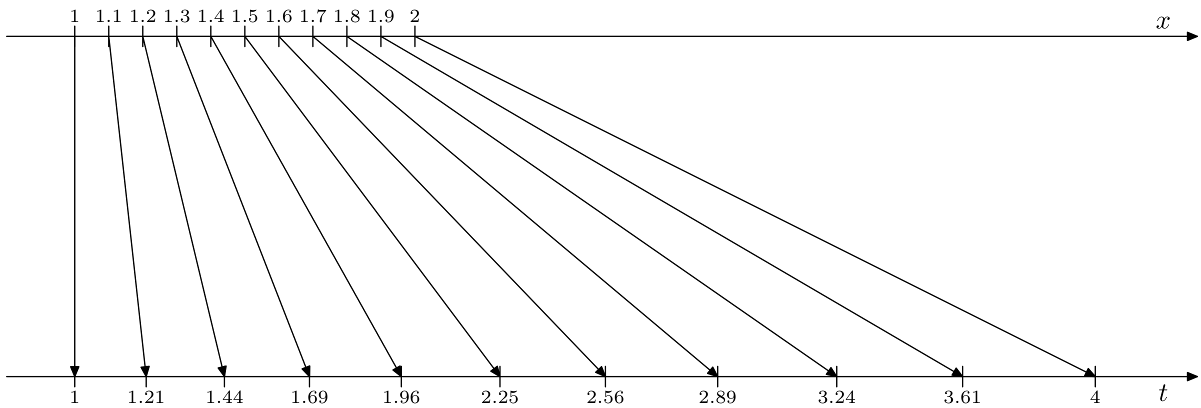
rys. 2

Wyobraźmy sobie, że ta podwójnie wyskalowana oś liczbowa wykonana jest z rozciągliwego materiału i rozciągnijmy ją tak, aby to skala opisana zmienną t odpowiadała geometrycznym odległościom między punktami (rys. 3).



rys. 3

Jeżeli chcielibyśmy prześledzić jak w fizycznym świecie przemieściły się poszczególne punkty podczas rozciągania osi liczbowej wyskalowanej x'ami do osi wyskalowanej t'kami, spójrzmy na rysunek 4.



rys. 4

Zauważmy, że przy takim rozciąganiu, zwiększają[1] się odległości między punktami. Jak bardzo się zwiększają? O tym mówi nam stosunek przyrostu t do przyrostu x, czyli jak by to zapisać w konwencji fizycznej: $\dfrac{\Delta t}{\Delta x}$, a to w mikroskali staje się pochodną funkcji użytej w podstawieniu do przeliczania jednej zmiennej na drugą: $\dfrac{dt}{dx}=\dfrac{d\,x^2}{dx}=2x$.

To oznacza w szczególności, że w pobliżu lewego końca rozważanego przedziału[2] odległości między punktami zwiększają się przy rozciąganiu dwukrotnie, a w pobliżu prawego[3] czterokrotnie.

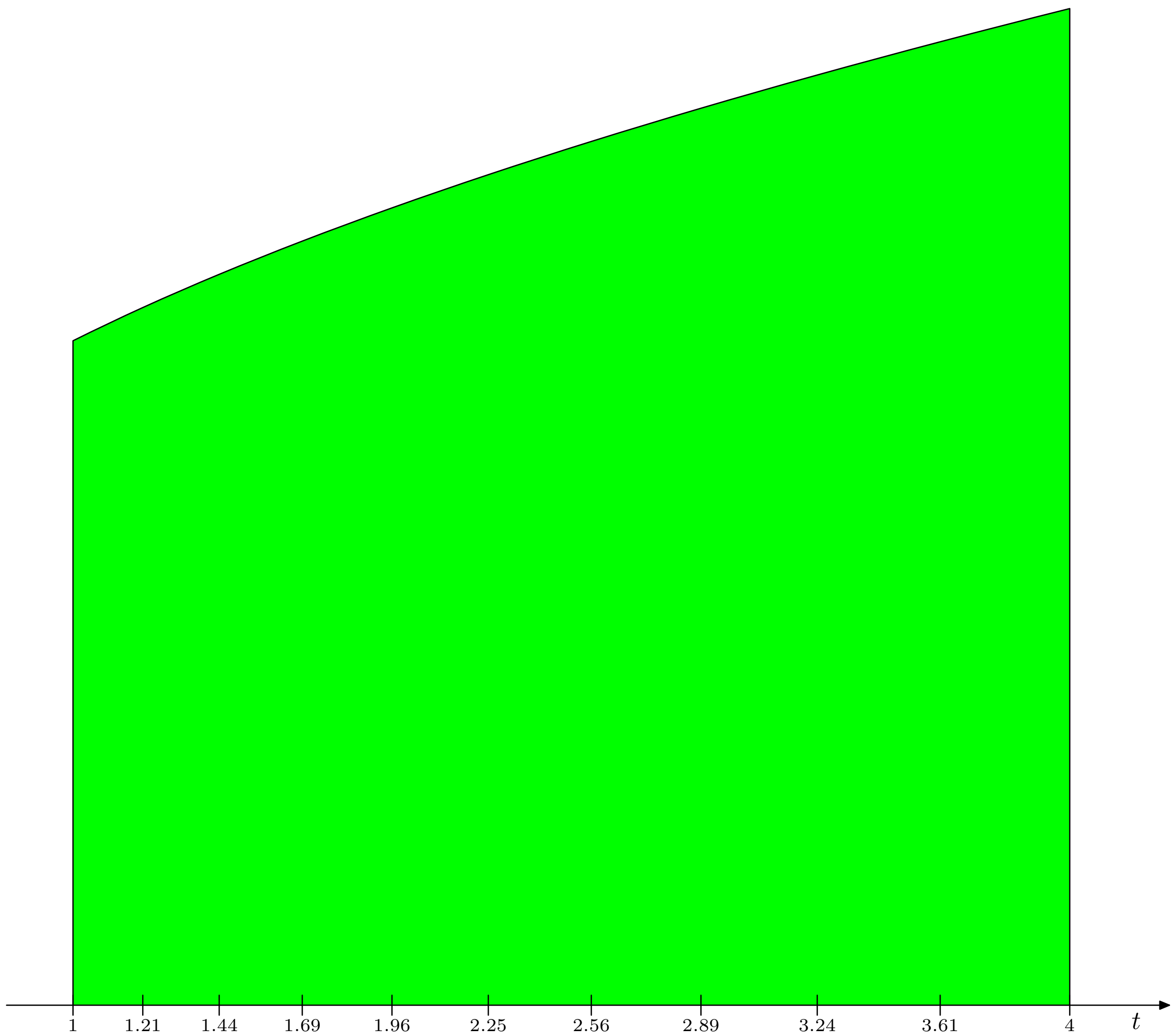
[1]Tu akurat się zwiększają, ale przy innym podstawieniu mogłyby się zmniejszać, co odpowiadałoby nie rozciąganiu, ale ściskaniu elastycznej osi liczbowej.

[2]Czyli $x=1$ odpowiadające $t=1$.

[3]Czyli $x=2$ odpowiadające $t=4$.

A gdybyśmy chcieli z powrotem skurczyć oś t'ków do osi x'ów, to skala deformacji byłaby w makroskali równa $\frac{\Delta x}{\Delta t}$, a w mikroskali $\frac{dx}{dt} = \frac{d\sqrt{t}}{dt} = \frac{1}{2\sqrt{t}}$, co oczywiście odpowiada $\frac{1}{2x}$, skoro ściskanie jest cofnięciem wcześniejszego rozciągania w skali $2x$.

Wyobraźmy sobie teraz, że nie tylko oś pozioma jest rozciągliwa, ale cały rozważany obszar narysowany jest na elastycznej dwuwymiarowej błonie i rozciągamy go w poziomie tak, jak rozciągnęliśmy przed chwilą oś poziomą, a w pionie niczego nie zmieniamy (rys. 5).



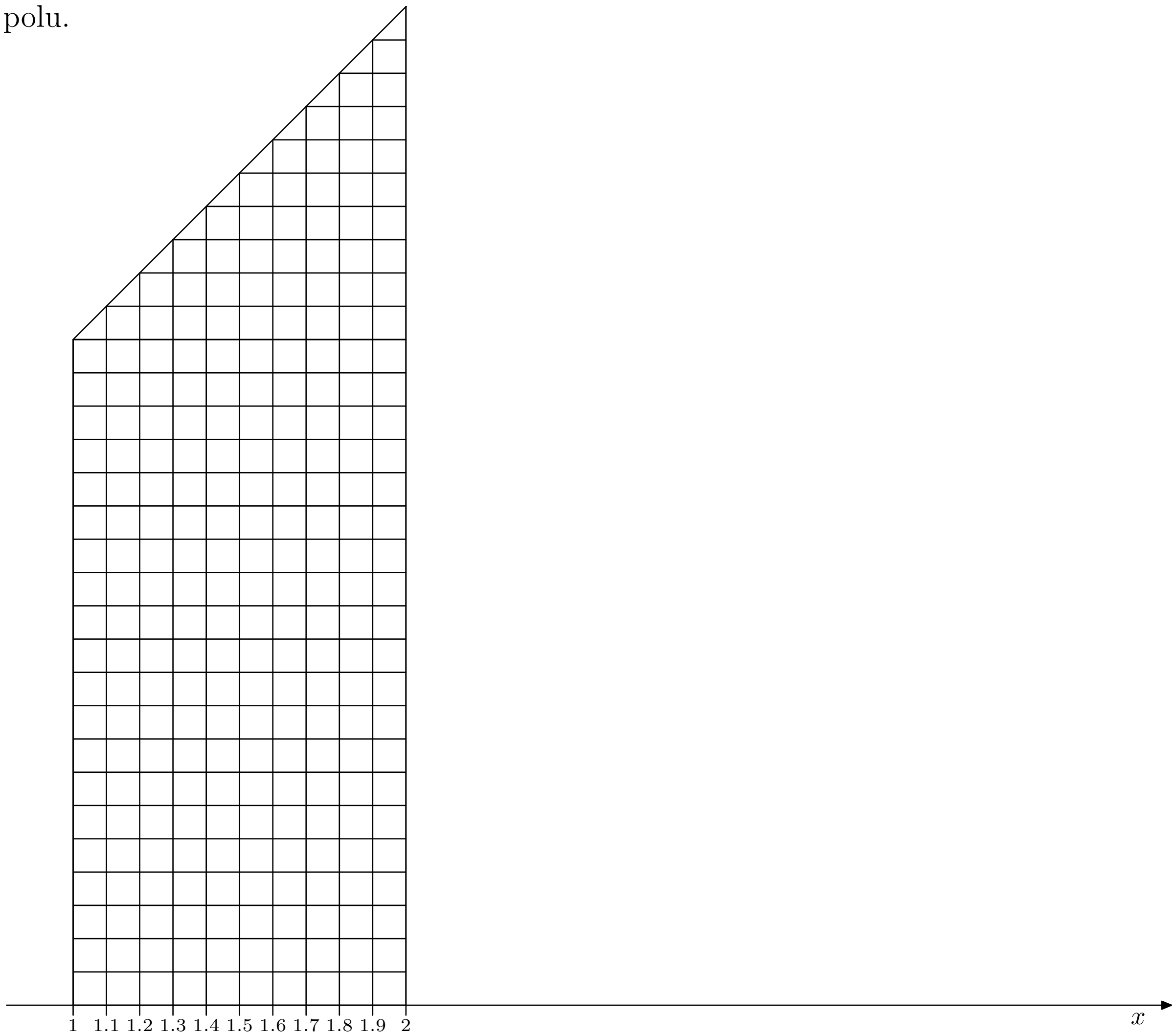
rys. 5

Pole tego obszaru wyraża się całką $\int\limits_1^4 \sqrt{t}+1\,dt$. Gdyby ktoś naiwnie pomyślał, że przy zmianie zmiennej całkowania[4] wystarczy przeliczyć funkcję podcałkową z jednej zmiennej na drugą i zmienić przedział całkowania, a przy tym bezmyślnie zamienić dx na dt, otrzymałby taki "wzorek":

$$\int\limits_1^2 x+1\,dx = \int\limits_1^4 \sqrt{t}+1\,dt\,.$$

"Wzorek" ten oparty jest na błędnym przekonaniu, że po opisanym wyżej rozciągnięciu zachowuje się pole obszaru, co ewidentnie nie jest prawdą.

Aby łatwiej wyobrażać sobie wpływ deformacji rozważanej figury na pole powierzchni, pokratkujmy[5] wyjściową figurę w pionie i poziomie co 1/10. (rys. 6). Tym samym jest ona podzielona na kwadraciki o polu 1/100 i trochę trójkącików o dwa razy mniejszym polu.

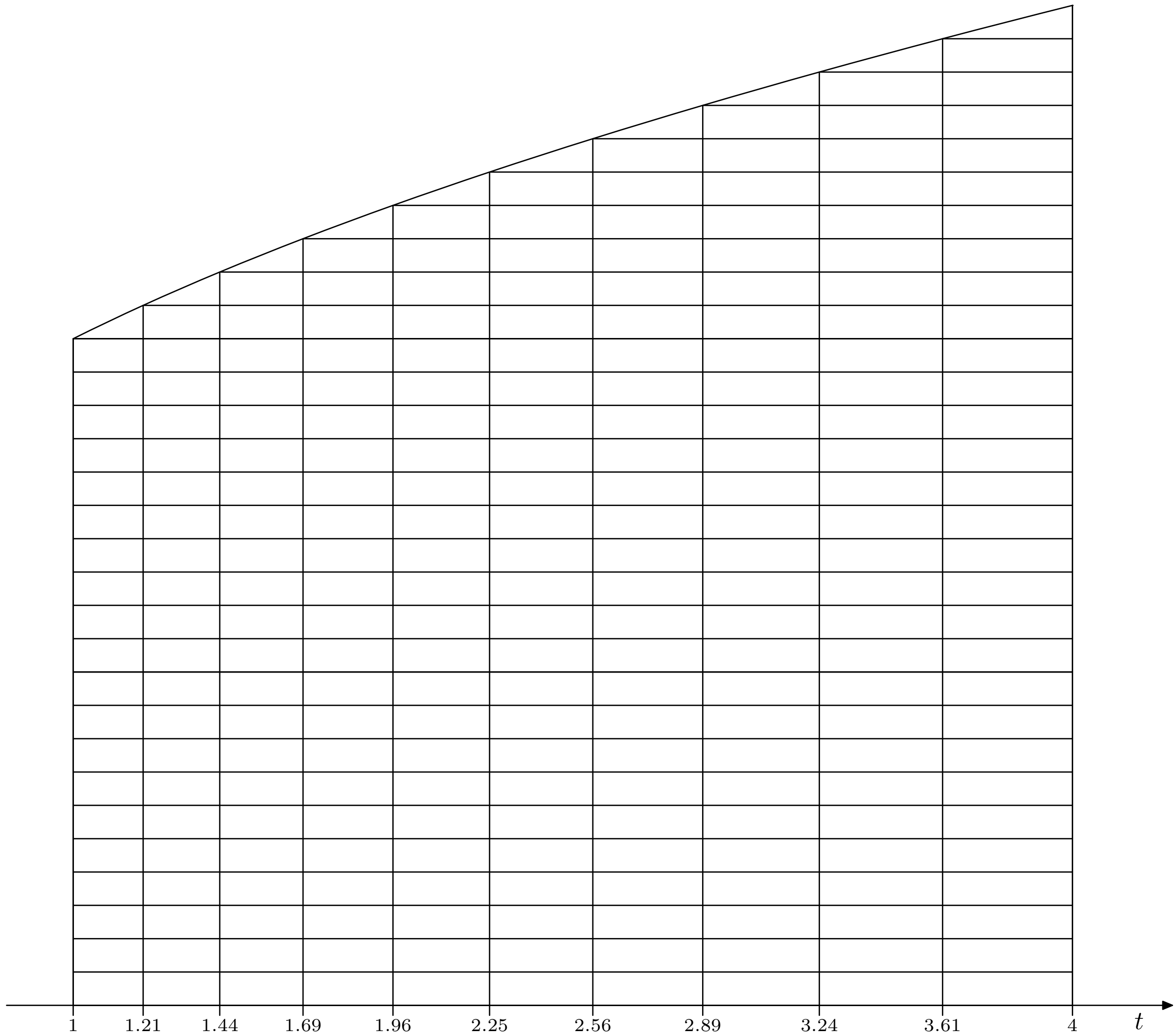


rys. 6

[4]Całkowanie przez podstawienie nazywa się też zmianą zmiennej całkowania.

[5]Rezygnując przy tym z koloru zielonego, bez którego kratki są bardziej czytelne.

Po rozciągnięciu tak pokratkowanej figury, otrzymamy obrazek pokazany na rysunku 7.

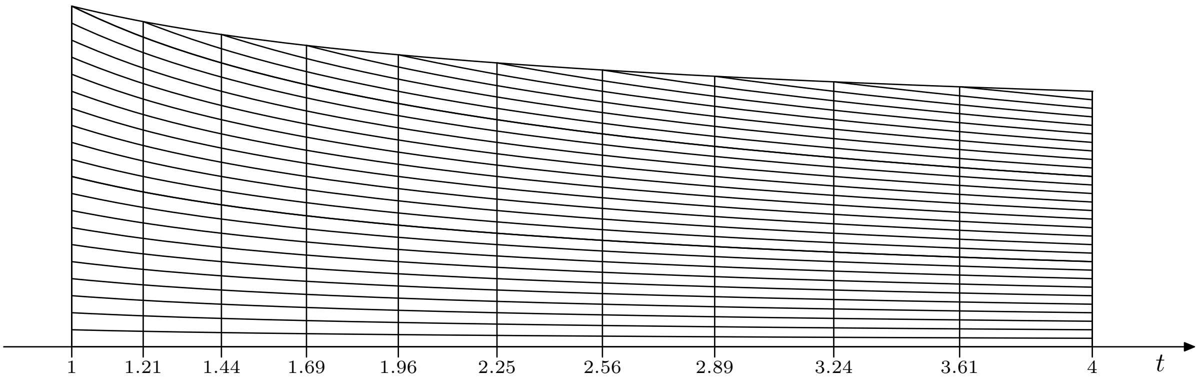


rys. 7

Widać gołym okiem, że zdeformowane kratki wcale nie mają pola 1/100, a jak popatrzymy uważnie na skalę na osi t, to zobaczymy, że w pierwszej kolumnie od lewej pole kratek zwiększyło się o czynnik 2.1, natomiast w prawej (czyli ostatniej) kolumnie o czynnik 3.9.

Wyobraźmy sobie teraz, że elastyczna błona, na której narysowany jest pokratkowany obszar, ma magiczną własność: Pozwala nam się dowolnie deformować w poziomie, ale przy każdej deformacji zachowuje pole powierzchni – po prostu rozciąganie w poziomie jest rekompensowane automatycznym kurczeniem się magicznej błony w pionie.

Obszar narysowany na takiej błonie po rozciągnięciu nie przybrałby kształtu jak na rysunku 7, ale skurczyłby się w pionie i wyglądałby tak jak na rysunku 8, gdzie każdy czworokącik krzywoliniowy ma pole 1/100 – identyczne jak przed deformacją.



rys. 8

Ponieważ w poziomie rozciąganie było o czynnik $2x = 2\sqrt{t}$, o dokładnie taki czynnik obszar kurczy się w pionie prowadząc do prawdziwego wzoru

$$\int_1^2 x+1\,dx = \int_1^4 \sqrt{t}+1\,\frac{dt}{2\sqrt{t}}\,.$$

Podsumowując: Zmiana zmiennej całkowania w całce oznaczonej polega na zastosowaniu monotonicznego przekształcenia do przedziału całkowania. To wymaga:
- odpowiedniej zmiany granic całkowania,
- przeliczenia funkcji podcałkowej na nową zmienną.

Ponadto musimy zrekompensować rozciąganie w poziomie obszaru, którego polem[6] jest całka oznaczona. Temu służy formalne przeliczenie różniczki jednej zmiennej na różniczkę drugiej zmiennej, czyli w naszym przykładzie dx na dt zgodnie z formalną formułką $dx = \dfrac{dt}{2\sqrt{t}}$.

[6] Mówienie o polu ma sens, gdy funkcja podcałkowa jest nieujemna. W przypadku funkcji przyjmującej także wartości ujemne, opis wymagałby uwzględnienia, z jakim znakiem geometryczne pole jest liczone do całki.

Obejrzyj w internecie wykłady doc. Górniaka z PWr:

Odcinek **75:** Całkowanie przez części (dla całek oznaczonych)[7].

Odcinek **76:** Całkowanie przez podstawienie (dla całek oznaczonych)[8].

W tym drugim wykładzie zwróć szczególną uwagę na końcówkę (od minuty 18:23), a w niej na następujące trzy fakty:

• Całka z funkcji nieparzystej po przedziale symetrycznym względem zera jest równa 0.

• Całka z funkcji parzystej po przedziale symetrycznym względem zera jest równa podwojonej całce po połowie przedziału.

• Całka z funkcji okresowej po pełnym okresie nie zależy od wyboru przedziału całkowania.

Zadania do rozwiązania

Uwaga: Zadania nie wymagają skomplikowanego całkowania, ale ćwiczą geometryczne spojrzenie na całkę oznaczoną.

151. Udowodnić nierówność

$$\int_1^3 \sqrt[3]{7x^2+1}\,dx > 6\,.$$

Wskazówka: Zbadać wypukłość funkcji podcałkowej lub przynajmniej zastanowić się nad położeniem jej wykresu względem odpowiedniej cięciwy.

Zanim zajrzysz na kolejną stronę, rozwiąż powyższe zadanie, a przynajmniej podejmij próbę rozwiązania, aby wiedzieć, gdzie napotykasz trudności.

---

[7]Mój osobisty smak krzywi się na wyrażenie typu $\int_a^b f\,dx$ – w filmie minuta 9:30. Wolę $\int_a^b f(x)\,dx$, ale dopuściłbym też $\int_a^b f$.

[8]Minuta 15:12 – pole ćwiartki okręgu to przejęzyczenie. Dlaczego?

Rozwiązanie:

Sposób I:

Pochodna funkcji podcałkowej $f(x)=\sqrt[3]{7x^2+1}$ dana jest wzorem

$$f'(x)=\frac{1}{3}\cdot\left(7x^2+1\right)^{-2/3}\cdot 14x=\frac{14}{3}\cdot x\cdot\left(7x^2+1\right)^{-2/3},$$

a pochodna drugiego rzędu jest równa

$$f''(x)=\frac{14}{3}\cdot\left(7x^2+1\right)^{-2/3}+\frac{14}{3}\cdot x\cdot\frac{-2}{3}\cdot\left(7x^2+1\right)^{-5/3}\cdot 14x=$$

$$=\frac{14}{3}\cdot\left(7x^2+1\right)^{-2/3}-\frac{392}{9}\cdot x^2\cdot\left(7x^2+1\right)^{-5/3}=$$

$$=\frac{14}{3}\cdot\left(7x^2+1\right)^{-5/3}\cdot\left(7x^2+1\right)-\frac{392}{9}\cdot x^2\cdot\left(7x^2+1\right)^{-5/3}=$$

$$=\left(\frac{14}{3}\cdot\left(7x^2+1\right)-\frac{392}{9}\cdot x^2\right)\cdot\left(7x^2+1\right)^{-5/3}=$$

$$=\left(3\cdot\left(7x^2+1\right)-28\cdot x^2\right)\cdot\frac{14}{9}\cdot\left(7x^2+1\right)^{-5/3}=\left(3-7\cdot x^2\right)\cdot\frac{14}{9}\cdot\left(7x^2+1\right)^{-5/3},$$

co jest ujemne dla $x\geqslant 1$. Stąd wynika, że funkcja f jest ściśle wklęsła na przedziale $[1,+\infty)$, a więc jej wykres leży nad cięciwą łączącą punkty wykresu odpowiadające $x=1$ i $x=3$. Ponieważ cięciwa ta ma równanie $y=x+1$, otrzymujemy nierówność

$$\sqrt[3]{7x^2+1}>x+1 \tag{1}$$

spełnioną dla $x\in(1,3)$. Wobec tego

$$\int_1^3\sqrt[3]{7x^2+1}\,dx>\int_1^3 x+1\,dx=\frac{x^2}{2}+x\bigg|_{x=1}^{3}=\frac{9}{2}+3-\frac{1}{2}-1=6\,.$$

Uwaga:

Wartość całki $\int_1^3 x+1\,dx$ można podać bez całkowania korzystając z następującej reguły: Całka oznaczona z funkcji liniowej jest iloczynem długości przedziału całkowania przez wartość funkcji podcałkowej w środku przedziału całkowania.

Sposób II:

Postępujemy jak w Sposobie I, przy czym nierówność (1) dowodzimy bezpośrednio przekształcając ją do postaci równoważnych:

$$7x^2+1>(x+1)^3\,,$$

$$7x^2+1>x^3+3x^2+3x+1\,,$$

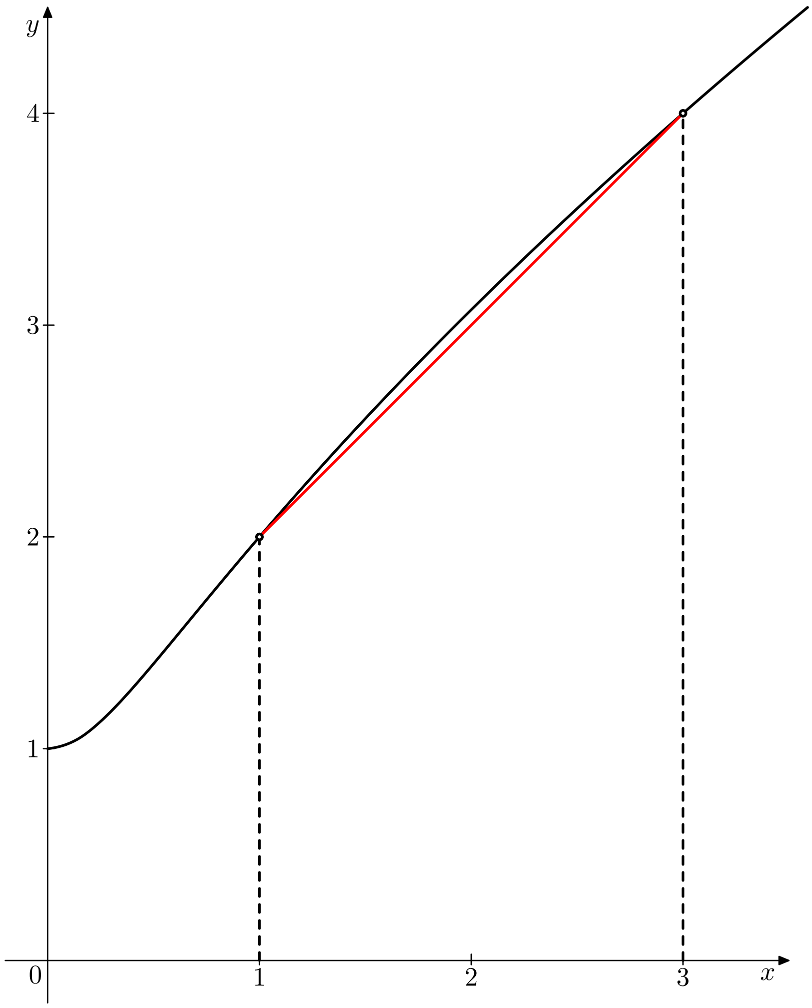
$$0>x^3-4x^2+3x\,,$$

$$0>x\cdot(x-1)\cdot(x-3)\,,$$

co jest prawdziwe dla $x\in(1,3)$.

Uwaga:

Wartość szacowanej całki jest mniejsza od 6,1. Oznacza to, że w rozwiązaniu nie możemy sobie pozwolić na zbyt grube oszacowania. Na rysunku 9 przedstawiony jest wykres[9] funkcji f wraz z jej cięciwą[10] użytą do oszacowania całki.



rys. 9

152. Rozstrzygnąć, czy wartość całki oznaczonej

$$\int_1^3 \log_2\left(5^x+3\right)\,dx$$

jest mniejsza czy większa od 10.

Zanim zajrzysz na kolejną stronę, rozwiąż powyższe zadanie, a przynajmniej podejmij próbę rozwiązania, aby wiedzieć, gdzie napotykasz trudności.

[9]Czarna linia.
[10]Czerwona linia.

Rozwiązanie:

Oznaczmy przez f funkcję podcałkową:

$$f(x)=\log_2\left(5^x+3\right) .$$

Wówczas

$$f'(x)=\frac{1}{\ln 2}\cdot\frac{5^x\cdot\ln 5}{5^x+3}$$

oraz

$$f''(x)=\frac{1}{\ln 2}\cdot\frac{5^x\cdot(\ln 5)^2}{5^x+3}-\frac{1}{\ln 2}\cdot\frac{5^{2x}\cdot(\ln 5)^2}{(5^x+3)^2}=\frac{1}{\ln 2}\cdot\frac{3\cdot 5^x\cdot(\ln 5)^2}{(5^x+3)^2}>0\,,$$

skąd wynika, że funkcja f jest ściśle wypukła.

Ponieważ $f(1)=3$ oraz $f(3)=7$, wykres funkcji f leży poniżej cięciwy o końcach $(1,3)$ i $(3,7)$. Wobec tego $f(x)<2x+1$ dla $x\in(1,3)$ i w konsekwencji

$$\int_1^3 \log_2\left(5^x+3\right)\,dx<\int_1^3 2x+1\,dx=10\,.$$

Wartość ostatniej całki można obliczyć całkując bezpośrednio albo interpretując ją geometrycznie jako pole odpowiedniego trapezu.

Odpowiedź: Wartość podanej całki oznaczonej jest mniejsza od 10.

153. Rozstrzygnąć, czy wartość całki oznaczonej

$$\int_{10}^{12}\sqrt[3]{x^2+4}\,dx$$

jest mniejsza czy większa od 10.

Wskazówka: Tym razem zamiast cięciwy rozważyć odpowiednią styczną do wykresu funkcji podcałkowej.

Zanim zajrzysz na kolejną stronę, rozwiąż powyższe zadanie, a przynajmniej podejmij próbę rozwiązania, aby wiedzieć, gdzie napotykasz trudności.

Rozwiązanie:

Oznaczmy przez f funkcję podcałkową:

$$f(x)=\sqrt[3]{x^2+4}\,.$$

Wówczas

$$f'(x)=\frac{2x}{3}\cdot\left(x^2+4\right)^{-2/3}$$

oraz

$$f''(x)=\frac{2}{3}\cdot\left(x^2+4\right)^{-2/3}-\frac{8x^2}{9}\cdot\left(x^2+4\right)^{-5/3}=\frac{2x^2+8}{3}\cdot\left(x^2+4\right)^{-5/3}-\frac{8x^2}{9}\cdot\left(x^2+4\right)^{-5/3}=$$

$$=\frac{6x^2+24-8x^2}{9}\cdot\left(x^2+4\right)^{-5/3}=\frac{24-2x^2}{9}\cdot\left(x^2+4\right)^{-5/3}\ <\ 0\,,\qquad \text{o ile}\qquad x^2>12\,,$$

skąd wynika, że funkcja f jest ściśle wklęsła w przedziale $\left[\sqrt{12},\,+\infty\right)$ zawierającym interesujący nas przedział całkowania $[10,\,12]$.

Ponieważ $f(11)=5$, wykres funkcji f w przedziale całkowania leży poniżej[11] stycznej do wykresu w punkcie $(11,\,5)$. Wobec tego

$$f(x)<5+f'(11)\cdot(x-11)\qquad\text{dla}\qquad x\in(10,\,12)$$

i w konsekwencji

$$\int_{10}^{12}\sqrt[3]{x^2+4}\,dx<\int_{10}^{12}5+f'(11)\cdot(x-11)\,dx=10\,.$$

Wartość ostatniej całki można obliczyć interpretując ją geometrycznie jako pole odpowiedniego trapezu. Można też wykonać bezpośrednie całkowanie.

Odpowiedź: Wartość podanej całki oznaczonej jest mniejsza od 10.

Uwaga 1: Bez trudu można wyliczyć, że $f'(11)=22/75$ i wstawić tę wartość do wzorów występujących w rozwiązaniu, ale jest to całkiem zbyteczne z matematycznego punktu widzenia. Może to być jednak wskazane ze względów medycznych (większy komfort psychiczny osoby rozwiązującej zadanie).

Uwaga 2: Przy pomocy komputera można wyliczyć, że wartość podanej całki jest w przybliżeniu równa $9,9974$.

[11] Takie sformułowanie jest zgrabne, chociaż dla jego pełnej poprawności wymagałoby dodania nic nie wnoszącego do rozwiązania zastrzeżenia, że punkt styczności leży na stycznej, a nie poniżej niej.