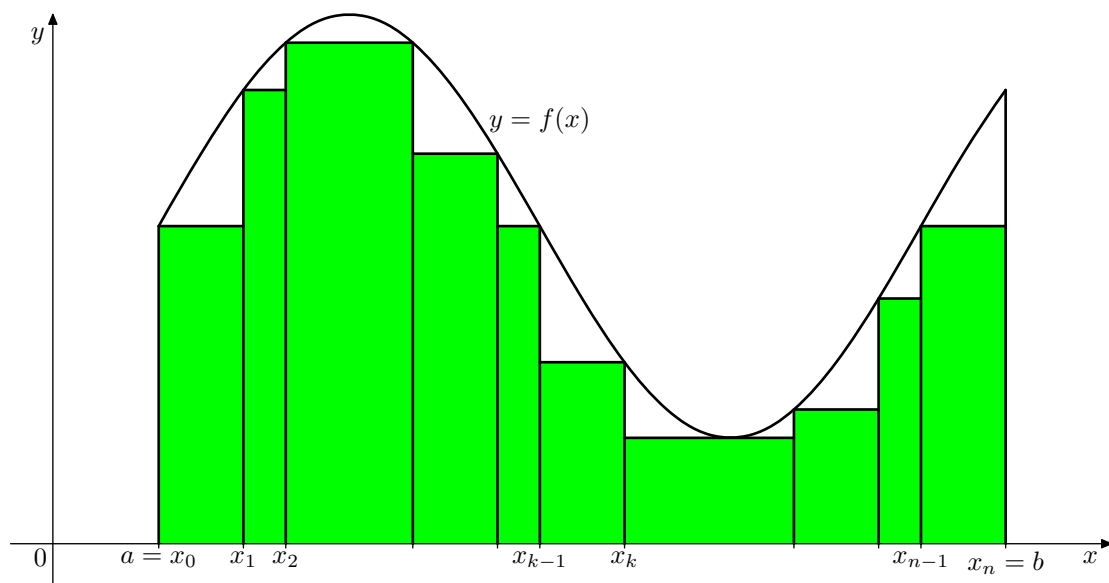


Dzień 6 (poniedziałek 23 marca 2020)

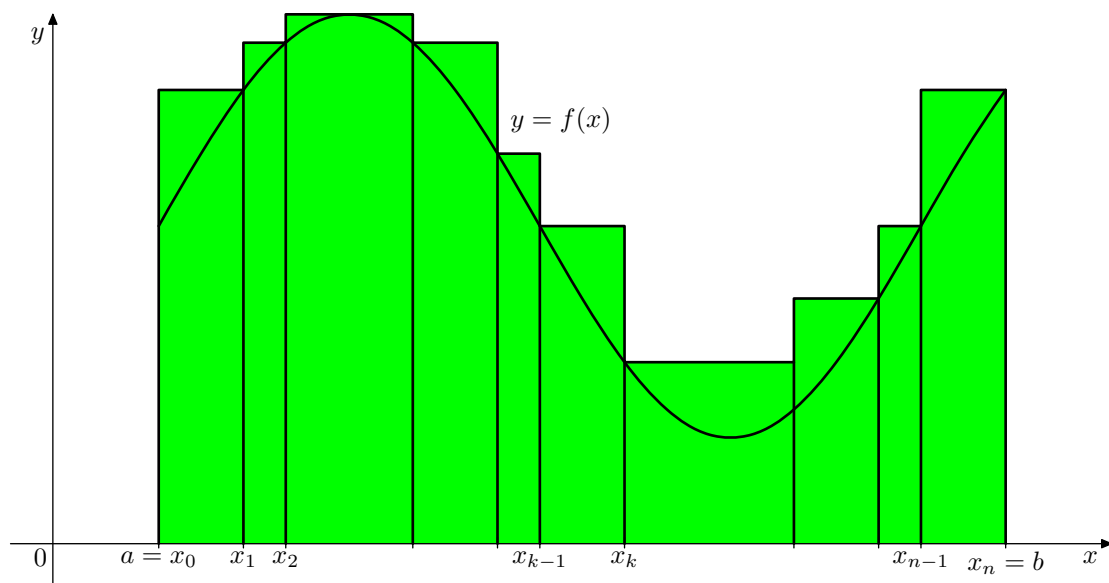
Przypomnienie najważniejszych fragmentów wykładu z wtorku 10.03.2020

Podziałem przedziału $[a, b]$ nazywamy każdy skończony ciąg $(x_0, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n)$, gdzie $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$.

Z takim podziałem wiążemy figury złożone z prostokątów zbudowanych na odcinkach podziału. Z jednej strony (rys. 1) budujemy największą figurę, która jest zawarta w obszarze pod wykresem funkcji f , a z drugiej (rys. 2) najmniejszą figurę, która ten obszar zawiera.



rys. 1



rys. 2

Biorąc pod uwagę, że k -tym przedziałkiem podziału jest przedział $[x_{k-1}, x_k]$, figury zamalowane na zielono na rysunkach 1 i 2 mają pola równe odpowiednio

$$\sum_{k=1}^n \left((x_k - x_{k-1}) \cdot \inf_{x \in [x_{k-1}, x_k]} f(x) \right) \quad \text{oraz} \quad \sum_{k=1}^n \left((x_k - x_{k-1}) \cdot \sup_{x \in [x_{k-1}, x_k]} f(x) \right).$$

Jeżeli $\mathcal{P}$ jest zbiorem wszystkich podziałów $(x_0, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n)$ przedziału $[a, b]$, to funkcja ograniczona $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ jest (z definicji) całkowalna wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\begin{aligned} \sup_{(x_0, x_1, \dots, x_n) \in \mathcal{P}} \sum_{k=1}^n \left((x_k - x_{k-1}) \cdot \inf_{x \in [x_{k-1}, x_k]} f(x) \right) &= \\ &= \inf_{(x_0, x_1, \dots, x_n) \in \mathcal{P}} \sum_{k=1}^n \left((x_k - x_{k-1}) \cdot \sup_{x \in [x_{k-1}, x_k]} f(x) \right). \end{aligned}$$

Całkowalne są wszystkie funkcje ciągłe, ale niektóre nieciągłe też (na razie tego nie precyzujemy).

Jeśli funkcja f jest całkowalna, to jest całka oznaczona $\int_a^b f(x) dx$ jest granicą ciągu sum Riemanna odpowiadających ciągowi podziałów przedziału $[a, b]$ o średnicy¹ dążącej do zera. W sumie Riemanna z każdego przedziałka podziału dowolnie wybieramy punkt, z którego czerpiemy wartość funkcji f . Jeżeli $(x_0, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n)$ jest podziałem przedziału $[a, b]$, a $y_k \in [x_{k-1}, x_k]$, to odpowiadająca temu podziałowi i temu wyborowi punktów y_k suma Riemanna jest równa

$$\sum_{k=1}^n \left((x_k - x_{k-1}) \cdot f(y_k) \right).$$

Powyższy fakt zapiszę różnymi wzorami opierającymi się o różny kompromis pomiędzy ogólnością i prostotą.

Wersja 1 (najogólniejsza):

Założenia: Funkcja $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ jest całkowalna.

Do tego dany jest ciąg podziałów przedziału $[a, b]$. W tym ciągu n -tym wyrazem jest podział $(x_{n,0}, x_{n,1}, x_{n,2}, \dots, x_{n,m_n-1}, x_{n,m_n})$, który jest podziałem na m_n przedziałików. I tak $x_{n,k}$ oznacza k -ty punkt n -tego podziału. Zakładamy, że średnice podziałów dążą do 0:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \max_{1 \leq k \leq m_n} (x_{n,k} - x_{n,k-1}) = 0.$$

I do tego jeszcze z każdego przedziałiku każdego podziału wybieramy dowolnie jeden punkt, a dokładniej z przedziałiku $[x_{n,k-1}, x_{n,k}]$ wybieramy punkt $y_{n,k}$.

Wówczas ciąg odpowiednich sum całkowych Riemanna jest zbieżny do całki oznaczonej:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{m_n} \left((x_{n,k} - x_{n,k-1}) \cdot f(y_{n,k}) \right) = \int_a^b f(x) dx.$$

¹Średnica podziału to długość najdłuższego przedziałika tego podziału: $\max_{1 \leq k \leq n} (x_k - x_{k-1})$.

Wersja 2 (trochę mniej ogólna: dowolne podziały, y-ki w prawych końcach):

Założenia: Funkcja $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ jest całkowalna.

Do tego dany jest ciąg podziałów przedziału $[a, b]$. W tym ciągu n -tym wyrazem jest podział $(x_{n,0}, x_{n,1}, x_{n,2}, \dots, x_{n,m_n-1}, x_{n,m_n})$, który jest podziałem na m_n przedziałików. I tak $x_{n,k}$ oznacza k -ty punkt n -tego podziału. Zakładamy, że średnice podziałów dążą do 0:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \max_{1 \leq k \leq m_n} (x_{n,k} - x_{n,k-1}) = 0.$$

Jako punkt z przedziałiku $[x_{n,k-1}, x_{n,k}]$ wybieramy punkt $y_{n,k} = x_{n,k}$.

Wówczas ciąg odpowiednich sum całkowych Riemanna jest zbieżny do całki oznaczonej:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{m_n} \left((x_{n,k} - x_{n,k-1}) \cdot f(x_{n,k}) \right) = \int_a^b f(x) dx.$$

Wersja 3 (jeszcze mniej ogólna: n -ty podział na n części, y-ki w prawych końcach):

Założenia: Funkcja $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ jest całkowalna.

Do tego dany jest ciąg podziałów przedziału $[a, b]$. W tym ciągu n -tym wyrazem jest podział $(x_{n,0}, x_{n,1}, x_{n,2}, \dots, x_{n,n-1}, x_{n,n})$, który jest podziałem na n przedziałików. I tak $x_{n,k}$ oznacza k -ty punkt n -tego podziału. Zakładamy, że średnice podziałów dążą do 0:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \max_{1 \leq k \leq n} (x_{n,k} - x_{n,k-1}) = 0.$$

Jako punkt z przedziałiku $[x_{n,k-1}, x_{n,k}]$ wybieramy punkt $y_{n,k} = x_{n,k}$.

Wówczas ciąg odpowiednich sum całkowych Riemanna jest zbieżny do całki oznaczonej:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left((x_{n,k} - x_{n,k-1}) \cdot f(x_{n,k}) \right) = \int_a^b f(x) dx.$$

Wersja 4 (n-ty podział jest podziałem na n równych przedziałów, y-ki są prawymi końcami):

Założenia: Funkcja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ jest całkowna.

Przyjmujemy, że n -ty podział przedziału $[a, b]$ składa się z punktów

$$x_{n,k} = a + k \cdot \frac{b-a}{n}$$

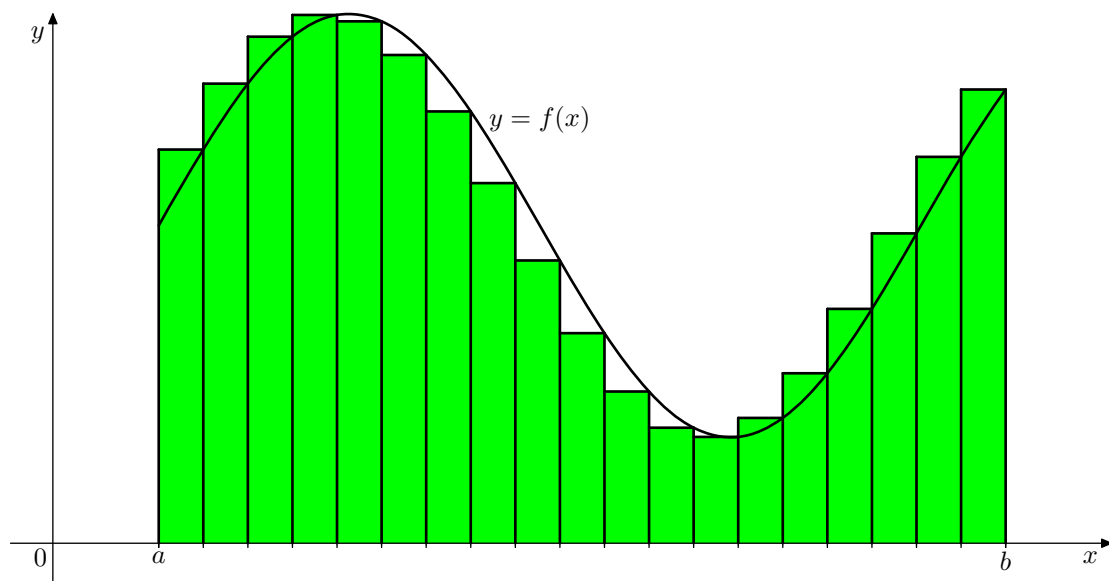
oraz że są one jednocześnie y -kami wybranymi do obliczania wartości funkcji f :

$$y_{n,k} = x_{n,k} = a + k \cdot \frac{b-a}{n}.$$

Wówczas ciąg odpowiednich sum całkowych Riemanna jest zbieżny do całki oznaczonej:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left(\frac{b-a}{n} \cdot f \left(a + k \cdot \frac{b-a}{n} \right) \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{b-a}{n} \cdot \sum_{k=1}^n f \left(a + k \cdot \frac{b-a}{n} \right) \right) = \int_a^b f(x) dx.$$

Suma Riemanna odpowiadająca opisanemu wyżej podziałowi przedziału na równe części przedstawiona jest na rysunku 3 jako zamalowane na zielono pole prostokątów.



rys. 3

Zauważmy, że ponieważ czynnik $\frac{b-a}{n}$ występuje we wszystkich składnikach sumy Riemanna, możemy go wyłączyć przed znak sumy.

Wersja 5 (n-ty podział jest podziałem na n równych przedziałów, y-ki są lewymi końcami):

Założenia: Funkcja $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ jest całkowalna.
Przyjmujemy, że n -ty podział przedziału $[a, b]$ składa się z punktów

$$x_{n,k} = a + k \cdot \frac{b-a}{n}$$

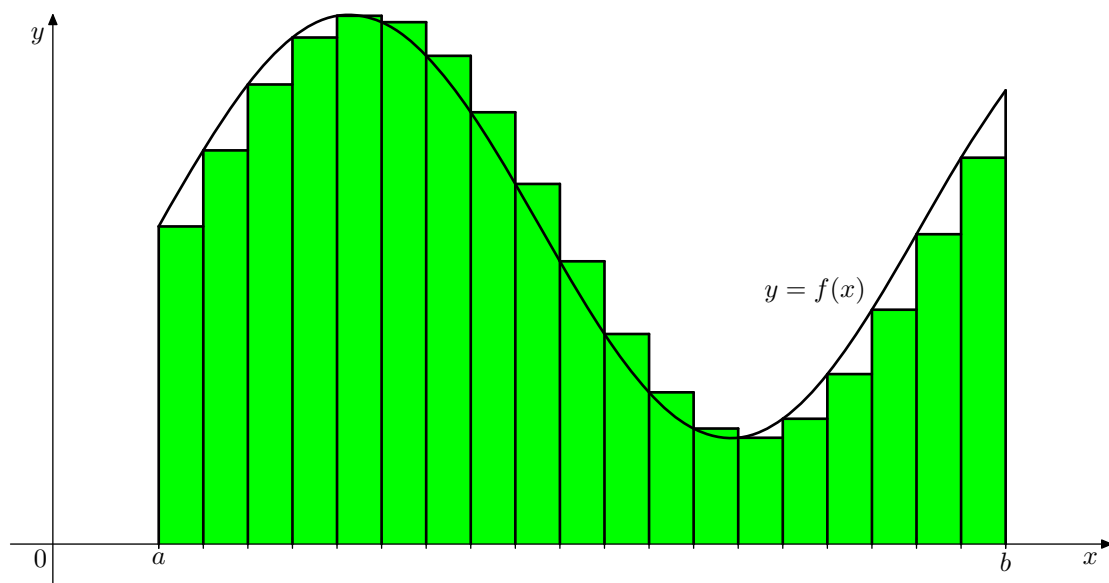
oraz że są one jednocześnie y -kami wybranymi do obliczania wartości funkcji f :

$$y_{n,k} = x_{n,k-1} = a + (k-1) \cdot \frac{b-a}{n}.$$

Wówczas ciąg odpowiednich sum całkowych Riemanna jest zbieżny do całki oznaczonej:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left(\frac{b-a}{n} \cdot f \left(a + (k-1) \cdot \frac{b-a}{n} \right) \right) &= \\ = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{b-a}{n} \cdot \sum_{k=1}^n f \left(a + (k-1) \cdot \frac{b-a}{n} \right) \right) &= \int_a^b f(x) dx. \end{aligned}$$

Suma Riemanna odpowiadająca opisanemu wyżej podziałowi przedziału na równe części przedstawiona jest na rysunku 4 jako zamalowane na zielono pole prostokątów.



rys. 4

Obejrzyj w internecie wykłady doc. Górniaka z PWr:

Odcinek **2**: Definicja i interpretacja geometryczna całki oznaczonej.

Odcinek **3**: Obliczanie (na podstawie definicji) całek oznaczonych.

Uwagi o drobnych różnicach między moimi definicjami i definicjami przyjętymi przez doc. Górniaka:

Ja przyjąłem definicję całki oznaczonej używając kresów pól figur po zbiorze wszystkich podziałów przedziału całkowania. Jako własność funkcji całkownej² przytoczyłem twierdzenie mówiące, że całka jest granicą ciągu sum Riemanna³ odpowiadających ciągowi podziałów przedziału o średnicy dążącej do zera. W wykładzie doc. Górniaka zbieżność ciągu sum całkowych jest użyta w definicji całkowności. Ponadto doc. Górniak zakłada, że n -ty podział jest podziałem na n odcinków, a ja tego nie zakładałem – coś za coś, ja miałem odrobinę ogólniej, ale za to musiałem mieć dodatkowe oznaczenie na liczbę przedziałików w n -tym podziale.

Zadania do rozwiązania

181. Obliczyć całkę

$$\int_0^1 x^3 dx$$

poprzez obliczenie granicy ciągu sum Riemanna odpowiadających podziałom przedziału całkownia na równe części (wersja 4).

Potem (a nie przedtem !!!) obliczyć wartość całki przez bezpośrednie całkowanie i porównać wyniki.

Zanim zajrzysz na kolejną stronę, rozwiąż powyższe zadanie, a przynajmniej podejmij próbę rozwiązania, aby wiedzieć, gdzie napotykasz trudności.

²Póki co wiemy, że funkcje ciągle są całkowne, a także całkowne są niektóre funkcje nieciągłe, ale na razie bez dokładniejszego sprecyzowania.

³Można mówić: suma Riemanna, suma całkową, suma całkową Riemanna.

Rozwiązanie:

Dla funkcji określonej na przedziale $[0, 1]$ wzór z wersji 4 przybiera postać

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \right) = \int_0^1 f(x) dx.$$

Wobec tego⁴

$$\int_0^1 x^3 dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^n \left(\frac{k}{n}\right)^3 \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n^4} \cdot \sum_{k=1}^n k^3 \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n^4} \cdot \frac{n^2 \cdot (n+1)^2}{4} \right) = \frac{1}{4}.$$

Sprawdzenie:

$$\int_0^1 x^3 dx = \frac{x^4}{4} \Big|_{x=0}^1 = \frac{1}{4}.$$

182. Obliczyć całkę

$$\int_0^1 2^x dx$$

poprzez obliczenie granicy ciągu sum Riemanna odpowiadających podziałom przedziału całkownia na równe części (wersja 4).

Potem (a nie przedtem !!!) obliczyć wartość całki przez bezpośrednie całkowanie i porównać wyniki.

Zanim zajrzysz na kolejną stronę, rozwiąż powyższe zadanie, a przynajmniej podejmij próbę rozwiązania, aby wiedzieć, gdzie napotykasz trudności.

⁴Korzystamy po drodze ze wzoru $\sum_{k=1}^n k^3 = \frac{n^2 \cdot (n+1)^2}{4}$.

Rozwiązanie:

Dla funkcji określonej na przedziale $[0, 1]$ wzór z wersji 4 przybiera postać

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \right) = \int_0^1 f(x) dx.$$

Wobec tego⁵

$$\begin{aligned} \int_0^1 2^x dx &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^n 2^{k/n} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n} \cdot 2^{1/n} \cdot \frac{(2^{1/n})^n - 1}{2^{1/n} - 1} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n} \cdot 2^{1/n} \cdot \frac{2 - 1}{2^{1/n} - 1} \right) = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n} \cdot \frac{2^{1/n}}{2^{1/n} - 1} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(2^{1/n} \cdot \frac{1/n}{2^{1/n} - 1} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} 2^{1/n} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1/n}{2^{1/n} - 1} = 1 \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1/n}{2^{1/n} - 1} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1/n}{2^{1/n} - 1}. \end{aligned}$$

Jeżeli istnieje granica (funkcji)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{2^x - 1},$$

to istnieje również granica (ciągu)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1/n}{2^{1/n} - 1}$$

i są one równe. Korzystając z reguły de l'Hospitala otrzymujemy

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{2^x - 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x \cdot \ln 2} = \frac{1}{\ln 2}$$

i tyle właśnie wynosi wartość szukanej całki.

Sprawdzenie:

$$\int_0^1 2^x dx = \frac{2^x}{\ln 2} \Big|_{x=0}^1 = \frac{2}{\ln 2} - \frac{1}{\ln 2} = \frac{1}{\ln 2}.$$

Do kolejnych dwóch zadań nie podaję rozwiązań – podziel się swoimi wynikami na forum na moodlu.

183. Pomyślałem sobie jakąś funkcję liniową $f: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$. Nie podam Ci tej funkcji, ale Ty masz za zadanie znaleźć wartość całki $\int_{-1}^1 f(x) dx$. Mogę podać Ci wartość funkcji f w jednym wybranym przez Ciebie punkcie.

O wartość funkcji w którym punkcie mnie zapytasz i jak na podstawie tej informacji obliczysz wartość całki?

184. Pomyślałem sobie jakąś funkcję $f: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ będącą wielomianem trzeciego stopnia. Nie podam Ci tej funkcji, ale Ty masz za zadanie znaleźć wartość całki $\int_{-1}^1 f(x) dx$. Mogę podać Ci wartości funkcji f w dwóch wybranych przez Ciebie punktach.

O wartości funkcji w których dwóch punktach mnie zapytasz i jak na podstawie tej informacji obliczysz wartość całki?

⁵Korzystamy po drodze ze wzoru na sumę postępu geometrycznego.