

Dzień 7 (wtorek 24 marca 2020)

Zaczniemy od zadania podobnego do wczorajszych zadań **181** i **182**.

185. Obliczyć całkę

$$\int_0^1 \sqrt{x} \, dx$$

poprzez obliczenie granicy ciągu sum całkowych Riemanna.

Potem (a nie przedtem !!!) obliczyć wartość całki przez bezpośrednie całkowanie i porównać wyniki.

Zanim zajrzysz na kolejną stronę, rozwiąż powyższe zadanie, a przynajmniej podejmij próbę rozwiązania, aby wiedzieć, gdzie napotykasz trudności.

Rozwiązanie:

Najpierw pokażę, w jaki sposób można naiwnie próbować rozwiązać to zadanie i dlaczego to się nie udaje.

Dla funkcji ciągłej $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ i ciągu podziałów przedziału na równe części, interesujący nas wzór ogólny przybiera postać

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \right) = \int_0^1 f(x) dx.$$

Wobec tego

$$\int_0^1 \sqrt{x} dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^n \sqrt{\frac{k}{n}} \right).$$

Trudnością, jaką napotykamy w tym momencie, jest brak wzoru, który pozwoliłby wyrazić sumę

$$\sum_{k=1}^n \sqrt{k} = \sqrt{1} + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{4} + \sqrt{5} + \dots + \sqrt{n-1} + \sqrt{n}$$

w prostej postaci pozwalającej na przejście graniczne.

No cóż, naiwnie sądziliśmy, że najłatwiej będzie wybrać możliwie najprostszy ciąg podziałów przedziału całkowania, a mianowicie podziały na równe części. Ale co nam z tego, że sam podział jest ładny, skoro funkcja podcałkowa w punktach podziału przyjmuje wartości wykluczające zwinięcie otrzymanej sumy do prostej postaci.

Musimy więc zmienić nasze priorytety. Nieważne, czy przedziałiki podziału są równe, czy nie. Przede wszystkim wartości funkcji podcałkowej w punktach podziału muszą być możliwie najprostsze. Ponieważ w rozważanym przykładzie funkcją podcałkową jest pierwiastek kwadratowy, punktami podziału powinny być liczby, których pierwiastki kwadratowe są liczbami wymiernymi, a jeszcze lepiej, jeśli nie będą to byle jakie liczby wymierne chaotycznie rozmieszczone, ale liczby wymierne tworzące w miarę regularny ciąg¹, na przykład ciąg arytmetyczny.

To prowadzi do pomysłu, aby za punkty n -tego podziału przyjąć kwadraty liczb wymiernych tworzących skończony ciąg arytmetyczny. Oczywiście taki, aby zerowy punkt podziału był lewym, a n -ty prawym końcem przedziału całkowania, czyli

$$x_{n,k} = \frac{k^2}{n^2}.$$

Zanim zajrzysz na kolejną stronę, postaraj się odszukać we wczorajszym wykładzie wzorek, który ma tu zastosowanie i doprowadzić do końca obliczenia.

¹Tu mamy na myśli ciąg skończony, ale słowo "skończony" pomijamy, aby nie zaburzać płynności i tak już rozbudowanego zdania.

Zastosowanie ma wersja 3 (n -ty podział na n części, y -ki w prawych końcach):

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left((x_{n,k} - x_{n,k-1}) \cdot f(x_{n,k}) \right). \quad (\clubsuit)$$

W naszym wypadku

$$a = 0, \quad b = 1, \quad f(x) = \sqrt{x}, \quad x_{n,k} = \frac{k^2}{n^2},$$

skąd po podstawieniu powyższych danych do wzoru ($\clubsuit$) otrzymujemy

$$\begin{aligned} \int_0^1 \sqrt{x} dx &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left(\left(\frac{k^2}{n^2} - \frac{(k-1)^2}{n^2} \right) \cdot \sqrt{\frac{k^2}{n^2}} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left(\left(\frac{2k-1}{n^2} \right) \cdot \frac{k}{n} \right) = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n^3} \cdot \sum_{k=1}^n (2k^2 - k) \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n^3} \cdot \left(2 \cdot \sum_{k=1}^n k^2 - \sum_{k=1}^n k \right) \right) = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n^3} \cdot \left(\frac{n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)}{3} - \frac{n \cdot (n+1)}{2} \right) \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{(n+1) \cdot (2n+1)}{3n^2} - \frac{n+1}{2n^2} \right) = \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

Sprawdzenie:

$$\int_0^1 \sqrt{x} dx = \frac{2}{3} \cdot x^{3/2} \Big|_{x=0}^1 = \frac{2}{3}.$$

Widać wyraźnie, że używanie sum Riemanna do wyliczania całki oznaczonej jest dość żmudne, a czasem wręcz może być praktycznie niemożliwe. I na dłuższą metę wydaje się bezcelowe, skoro mamy dużo prostszy sposób na obliczanie całek oznaczonych. Ale można w drugą stronę... Nie uprzedzamy jednak tego, co za chwilę się stanie i popatrzymy na taki przykład:

Przykład: Obliczyć granicę (ciągu):

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \dots + \frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n} \right).$$

Podejście 1 (naiwnie optymistyczne i dlatego nieudane):

Szacujemy sumę pod znakiem granicy od dołu i od góry, aby skorzystać z twierdzenia o trzech ciągach. Oszacowanie odbywa się przez pomnożenie liczby składników (czyli n) przez wspólne oszacowanie składników, czyli składnik najmniejszy bądź największy. Otrzymujemy

$$\frac{1}{2} \leftarrow \frac{1}{2} = \frac{n}{2n} \leq \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \dots + \frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n} \leq \frac{n}{n+1} \rightarrow 1.$$

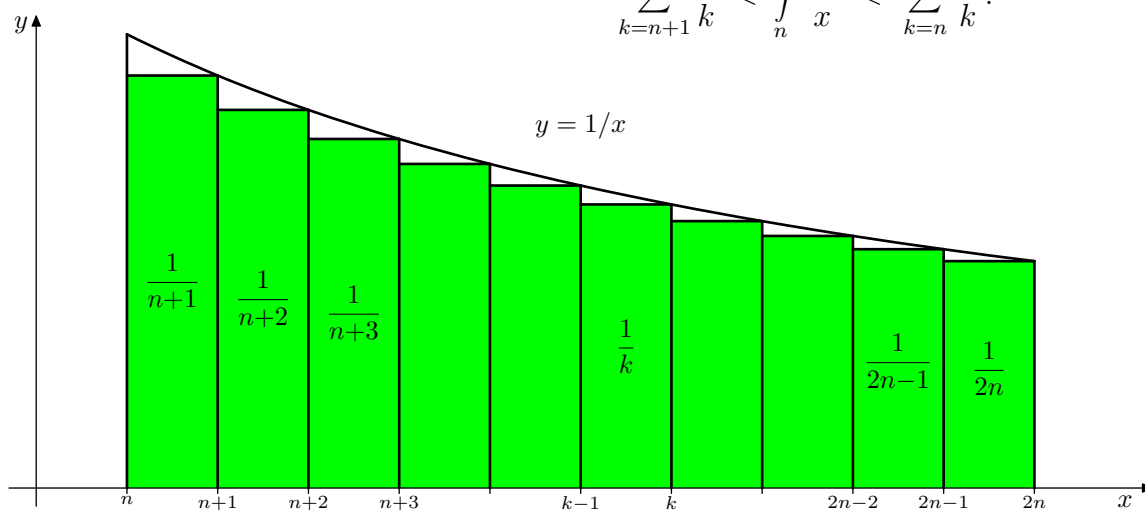
Ponieważ oszacowania dolne i górne dążą do różnych granic, twierdzenie o trzech ciągach nie ma tu zastosowania. Póki co nie tylko nie znamy granicy ciągu, ale nawet nie mamy pewności, że ciąg jest zbieżny, bo teoretycznie można sobie wyobrazić, że jego wyrazy dziwnie oscylują gdzieś między $1/2$ i 1 – raczej mało prawdopodobne, ale prostego argumentu wykluczającego taką oscylację nie widać.

Czyżbyśmy nieumiejętnie przeprowadzili oszacowania? Ale jak to zrobić lepiej, skoro iloraz pierwszego składnika sumy do ostatniego dąży do 2, a wielkość składników płynnie się zmienia. Nasze oszacowanie wrzuciło wszystkie składniki do jednego wora i dlatego było niedokładne (bo w tym worze składniki różniły się o czynnik prawie 2), ale nie widać jak w elementarny sposób uzyskać oszacowania dolne i górne dążące do tej samej granicy.

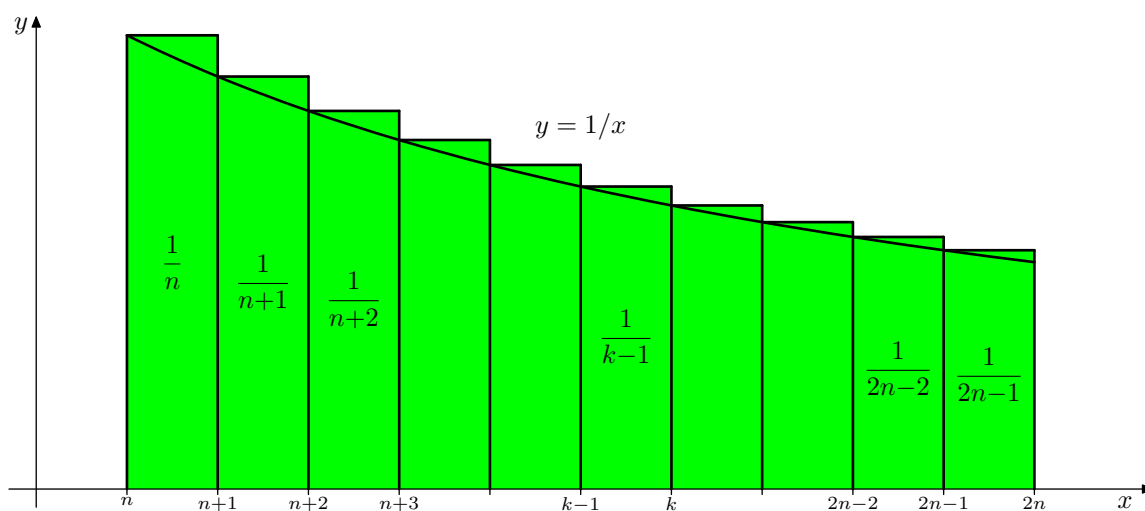
Podejście 2 (wykorzystujące specjalną postać sumy pod znakiem granicy):

Skorzystamy z twierdzenia o trzech ciągach, ale potrzebujemy naprawdę precyzyjnych oszacowań. W celu ich uzyskania rozważymy funkcję $f : [n, 2n] \rightarrow \mathbb{R}$ określoną wzorem $f(x) = 1/x$. Wówczas całka $\int_n^{2n} \frac{dx}{x}$ jest równa polu figury pod wykresem funkcji f , a ponadto porównanie tego pola z polami zielonych figur złożonych z prostokątów na rysunkach 1 i 2 prowadzi do nierówności:

$$\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} < \int_n^{2n} \frac{dx}{x} < \sum_{k=n}^{2n-1} \frac{1}{k}.$$



rys. 1



rys. 2

Ponieważ

$$\int_n^{2n} \frac{dx}{x} = \ln x \Big|_{x=n}^{2n} = \ln(2n) - \ln n = \ln 2,$$

otrzymujemy nierówność

$$\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} < \ln 2 < \sum_{k=n}^{2n-1} \frac{1}{k} = \frac{1}{n} + \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} - \frac{1}{2n} = \frac{1}{2n} + \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}.$$

Stąd

$$\ln 2 - \frac{1}{2n} < \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} < \ln 2.$$

Ponieważ otrzymane wyżej oszacowania dolne i górne dążą do tej samej granicy równej $\ln 2$, otrzymujemy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} = \ln 2.$$

Dość nieoczekiwana wartość szukanej granicy ciągu całkowiec rozgrzesza nas z niepowodzenia przy próbie skorzystania z twierdzenia o trzech ciągach po prostych elementarnych oszacowaniach – trudno bowiem oczekiwać, że proste elementarne rozważania doprowadzą do granicy równej $\ln 2$.

W powyższym rozwiązaniu nie było ciągu sum całkowych Riemanna. Natomiast wykorzystaliśmy interpretację geometryczną całki oznaczonej do uzyskania na tyle precyzyjnych oszacowań, aby można było skorzystać z twierdzenia o trzech ciągach. Wprawdzie cały czas używaliśmy tej samej funkcji, ale dla każdego n był inny przedział całkowania – jednak wartość całki oznaczonej była za każdym razem taka sama. Jest to wynikiem prostoty przykładu i pewnego zbiegu okoliczności. Jednak w innych tego typu przykładach takie podejście może być niewygodne bądź wręcz nieskuteczne. Mniej naturalne w tym konkretnym przykładzie, ale bardziej ogólne jeeeeest ...

Podejście 3 (najogólniejsze, wykorzystujące zbieżność ciągu sum Riemanna do całki oznaczonej):

Przypomnimy z wczorajszego wykładu:

Wersja 4 (n-ty podział jest podziałem na n równych przedziałów, y-ki są prawdziwymi końcami):

Założenia: Funkcja $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ jest całkowalna.

Przyjmujemy, że n -ty podział przedziału $[a, b]$ składa się z punktów

$$x_{n,k} = a + k \cdot \frac{b-a}{n}$$

oraz że są one jednocześnie y -kami wybranymi do obliczania wartości funkcji f :

$$y_{n,k} = x_{n,k} = a + k \cdot \frac{b-a}{n}.$$

Wówczas ciąg odpowiednich sum całkowych Riemanna jest zbieżny do całki oznaczonej:

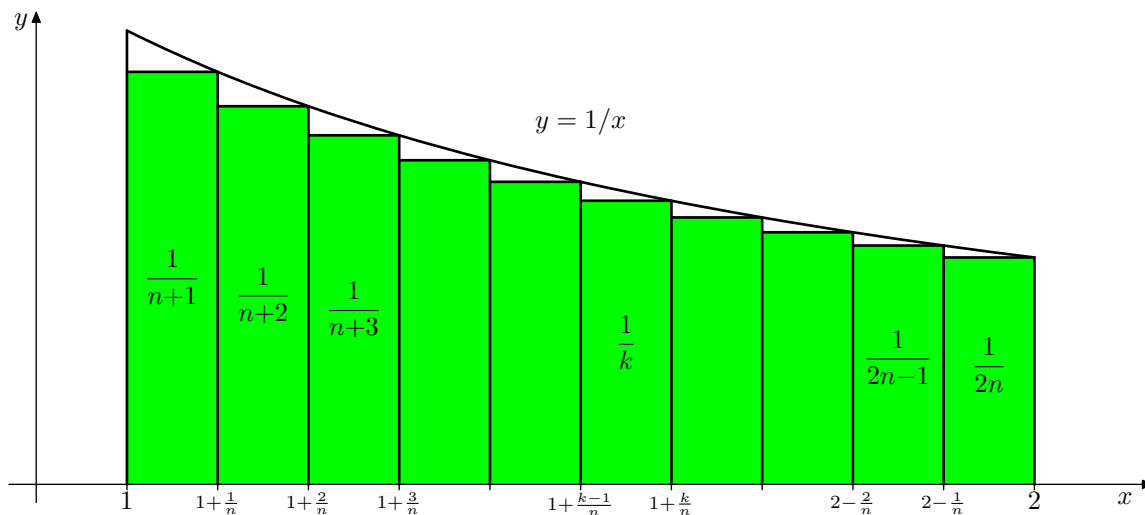
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{b-a}{n} \cdot \sum_{k=1}^n f \left(a + \frac{k}{n} \cdot (b-a) \right) \right) = \int_a^b f(x) dx. \quad (\heartsuit)$$

Aby wykorzystać rachunek całkowy do obliczenia granicy ciągu, którego wyrazami są coraz dłuższe sumy, trzeba tę granicę wpasować do postaci lewej strony wzoru $(\heartsuit)$. Zwróćmy uwagę, że po lewej stronie są sumy, których składniki nie zawierają ani gołego n , ani gołego k , a jedynie iloraz k/n . Ponadto sumowane są wartości jakiejś funkcji z argumentami skaczącymi o taką wartość² jak czynnik występujący przez znakiem sumy.

Zobaczmy jak to działa w rozważanym przez nas przykładzie:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k} = && \text{zmieniliśmy numerację składników} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^n \frac{1}{1+k/n} \right) = && \text{wyciągnęliśmy przed sumę czynnik } 1/n \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^n f \left(1 + \frac{k}{n} \right) \right) = && \text{zapisaliśmy składniki jako wartości funkcji } f(x) = 1/x \\ &= \int_1^2 \frac{dx}{x} = && \text{skorzystaliśmy ze wzoru } (\heartsuit) \\ &= \ln x \Big|_{x=1}^2 = \ln 2 - \ln 1 = \ln 2. && \text{obliczyliśmy wartość całki} \end{aligned}$$

Na rysunku 3 na zielono zaznaczona jest figura o polu równym n -temu wyrazowi rozważanego ciągu.



rys. 3

Wiele tego typu przykładów zobaczycie jutro...

²W ogólnym wzorze jest to $(b-a)/n$, ale często bywa po prostu $1/n$.