

Dzień 8 (środa 25 marca 2020)

Dziś daję Wam do rozwiązania 5 zadań¹. Zanim jednak do nich przejdziemy, muszę Wam wyjaśnić możliwe warianty podstawowego wzoru, który jest w tych zadaniach wykorzystywany²:

Wersja 4 (n-ty podział jest podziałem na n równych przedziałów, y-ki są prawymi końcami):

Ciąg odpowiednich sum całkowych Riemanna jest zbieżny do całki oznaczonej:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{b-a}{n} \cdot \sum_{k=1}^n f \left(a + k \cdot \frac{b-a}{n} \right) \right) = \int_a^b f(x) dx. \quad (\spadesuit)$$

Pierwsza modyfikacja wynika z konieczności. Otóż dana w zadaniu suma może nie mieć n składników, a np. $2n$, $5n$ czy $10n$. Na tę okoliczność trzeba mieć wariant wzoru ($\spadesuit$), który odpowiada podziałowi przedziału całkowania na inną niż n liczbę przedziałików równej długości. Niech tych przedziałików będzie Mn . Wówczas wzór ($\spadesuit$) przybiera postać

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{b-a}{Mn} \cdot \sum_{k=1}^{Mn} f \left(a + k \cdot \frac{b-a}{Mn} \right) \right) = \int_a^b f(x) dx. \quad (\spadesuit\spadesuit)$$

Druga modyfikacja wynika z wygody. Suma może mieć Mn składników, ale może być wygodniej numerować je inaczej niż liczbami od 1 do Mn . Powiedzmy, że składniki wygodnie jest ponumerować liczbami od $Pn+1$ do $(P+M)n$. Wtedy wzór ($\spadesuit$) przybiera postać

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{c}{n} \cdot \sum_{k=Pn+1}^{(P+M)n} f \left(a + k \cdot \frac{c}{n} \right) \right) = \int_{a+cP}^{a+c(P+M)} f(x) dx. \quad (\spadesuit\spadesuit\spadesuit)$$

Zauważ, że we wzorze ($\spadesuit\spadesuit\spadesuit$) czynnik przed znakiem sumy jest równy przyrostowi argumentu funkcji f w kolejnych składnikach, a przedział całkowania odpowiada zakresowi, jaki przebiegają argumenty funkcji f w składnikach sumy.

Na przykład we wzorze

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3}{n} \cdot \sum_{k=2n+1}^{7n} f \left(14 + \frac{3k}{n} \right) \right) = \int_{???}^{???} f(x) dx$$

czynnik przed sumą jest równy $3/n$ i o tyle przyrastają argumenty funkcji f w kolejnych składnikach sumy. Skoro w sumie wskaźnik k przebiega od z grubsza $2n$ do $7n$, to tym samym argumenty funkcji f przebiegają od 20 do 35 i takie właśnie powinny być granice całkowania.

186. Obliczyć granicę

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{n}{k^2 - 2kn + 2n^2}.$$

Zanim zajrzysz na kolejną stronę, rozwiąż powyższe zadanie, a przynajmniej podejmij próbę rozwiązania, aby wiedzieć, gdzie napotkasz trudności.

¹Z tych 5 zadań jedno ma 10 podpunktów.

²Korona06, 23 marca, strona 62.

Rozwiązanie:

Przekształcamy sumę występującą pod znakiem granicy:

$$\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{n}{k^2 - 2kn + 2n^2} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{\left(\frac{k}{n}\right)^2 - 2 \cdot \frac{k}{n} + 2} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=n+1}^{2n} f\left(\frac{k}{n}\right),$$

gdzie $f(x) = \frac{1}{x^2 - 2x + 2}$.

Ponieważ funkcja f jest całkowalna jako funkcja ciągła, jej sumy Riemanna odpowiadające ciągowi podziałów przedziału całkowania na przedziały równej długości dążą do całki oznaczonej:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=n+1}^{2n} f\left(\frac{k}{n}\right) &= \int_1^2 f(x) dx = \int_1^2 \frac{1}{x^2 - 2x + 2} dx = \int_1^2 \frac{1}{(x-1)^2 + 1} dx = \int_0^1 \frac{1}{t^2 + 1} dt = \\ &= \operatorname{arctg} t \Big|_{t=0}^1 = \operatorname{arctg} 1 - \operatorname{arctg} 0 = \frac{\pi}{4}, \end{aligned}$$

gdzie po drodze wykonaliśmy podstawienie $t = x - 1$, z formalnym wzorem $dt = dx$ i przekształceniem przedziału całkowania $x \in [1, 2]$ na $t \in [0, 1]$. Otrzymujemy więc

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{n}{k^2 - 2kn + 2n^2} = \frac{\pi}{4}.$$

187. Obliczyć granicę

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{2n} \frac{k^3}{5k^4 + n^4}.$$

Zanim zajrzysz na kolejną stronę, rozwiąż powyższe zadanie, a przynajmniej podejmij próbę rozwiązania, aby wiedzieć, gdzie napotykasz trudności.

Rozwiązanie:

Przekształcamy sumę występującą pod znakiem granicy:

$$\sum_{k=1}^{2n} \frac{k^3}{5k^4 + n^4} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^{2n} \frac{(k/n)^3}{5(k/n)^4 + 1} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^{2n} f\left(\frac{k}{n}\right),$$

gdzie $f(x) = \frac{x^3}{5x^4 + 1}$.

Ponieważ funkcja f jest całkowalna jako funkcja ciągła, jej sumy Riemanna odpowiadające ciągowi podziałów przedziału całkowania na przedziały równej długości dążą do całki oznaczonej:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^{2n} f\left(\frac{k}{n}\right) &= \int_0^2 f(x) dx = \int_0^2 \frac{x^3}{5x^4 + 1} dx = \frac{1}{20} \cdot \int_0^2 \frac{20x^3}{5x^4 + 1} dx = \\ &= \frac{\ln(5x^4 + 1)}{20} \Big|_{x=0}^2 = \frac{\ln 81 - \ln 1}{20} = \frac{4 \ln 3}{20} = \frac{\ln 3}{5}, \end{aligned}$$

gdzie po drodze skorzystaliśmy ze wzoru

$$\int \frac{g'(x)}{g(x)} dx = \ln |g(x)| + C.$$

Otrzymujemy więc

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{2n} \frac{k^3}{5k^4 + n^4} = \frac{\ln 3}{5}.$$

188. Obliczyć granicę (ciągu)

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\sqrt{n}}{(2n+1) \cdot \sqrt{n+1}} + \frac{\sqrt{n}}{(2n+2) \cdot \sqrt{n+2}} + \frac{\sqrt{n}}{(2n+3) \cdot \sqrt{n+3}} + \frac{\sqrt{n}}{(2n+4) \cdot \sqrt{n+4}} + \dots \right. \\ \left. \dots + \frac{\sqrt{n}}{(2n+k) \cdot \sqrt{n+k}} + \dots + \frac{\sqrt{n}}{(4n-2) \cdot \sqrt{3n-2}} + \frac{\sqrt{n}}{(4n-1) \cdot \sqrt{3n-1}} + \frac{\sqrt{n}}{(4n) \cdot \sqrt{3n}} \right). \end{aligned}$$

Zanim zajrzysz na kolejną stronę, rozwiąż powyższe zadanie, a przynajmniej podejmij próbę rozwiązania, aby wiedzieć, gdzie napotykasz trudności.

Rozwiązanie:

Przekształcamy sumę występującą pod znakiem granicy:

$$\sum_{k=1}^{2n} \frac{\sqrt{n}}{(2n+k) \cdot \sqrt{n+k}} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{\left(2 + \frac{k}{n}\right) \cdot \sqrt{1 + \frac{k}{n}}} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^{2n} f\left(1 + \frac{k}{n}\right),$$

gdzie $f(x) = \frac{1}{(x+1) \cdot \sqrt{x}}$.

Ponieważ funkcja f jest całkowalna jako funkcja ciągła, jej sumy Riemanna odpowiadające ciągowi podziałów przedziału całkowania na $2n$ przedziałów równej długości $1/n$ dążą do całki oznaczonej:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^{2n} f\left(1 + \frac{k}{n}\right) &= \int_1^3 f(x) dx = \int_1^3 \frac{1}{(x+1) \cdot \sqrt{x}} dx = 2 \cdot \int_1^{\sqrt{3}} \frac{1}{t^2+1} dt = \\ &= 2 \cdot \operatorname{arctg} t \Big|_{t=1}^{\sqrt{3}} = 2 \cdot \operatorname{arctg} \sqrt{3} - 2 \cdot \operatorname{arctg} 1 = 2 \cdot \frac{\pi}{3} - 2 \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{6}, \end{aligned}$$

gdzie po drodze wykonaliśmy podstawienie $t = \sqrt{x}$, czyli $x = t^2$, z formalnym wzorem $dx = 2t dt$ i przekształceniem przedziału całkowania $x \in [1, 3]$ na $t \in [1, \sqrt{3}]$.

Odpowiedź: Dana w zadaniu granica ciągu jest równa $\pi/6$.

189. Obliczyć granicę (ciągu)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^p \cdot \left(1 + 2\sqrt{2} + 3\sqrt{3} + 8 + 5\sqrt{5} + \dots + k\sqrt{k} + \dots + (5n-1)\sqrt{5n-1} + 5n\sqrt{5n}\right)$$

dla tak dobranej wartości rzeczywistej parametru p , aby granica ta była dodatnia i skończona.

Zanim zajrzysz na kolejną stronę, rozwiąż powyższe zadanie, a przynajmniej podejmij próbę rozwiązania, aby wiedzieć, gdzie napotykasz trudności.

Rozwiązanie:

Przekształcamy sumę występującą pod znakiem granicy:

$$n^p \cdot \sum_{k=1}^{5n} k^{3/2} = n^{p+1} \cdot \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^{5n} k^{3/2} = n^{p+5/2} \cdot \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^{5n} \left(\frac{k}{n}\right)^{3/2} = n^{p+5/2} \cdot \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^{5n} f\left(\frac{k}{n}\right),$$

gdzie $f(x) = x^{3/2}$.

Ponieważ funkcja f jest całkowalna jako funkcja ciągła, jej sumy Riemanna odpowiadające ciągowi podziałów przedziału całkowania na $5n$ przedziałów równej długości $1/n$ dążą do całki oznaczonej:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^{5n} f\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^5 f(x) dx = \int_0^5 x^{3/2} dx = \frac{2}{5} \cdot x^{5/2} \Big|_{x=0}^5 = \frac{2}{5} \cdot 5^{5/2} = 2 \cdot 5^{3/2} = 10 \cdot \sqrt{5}.$$

Powyższa wartość będzie granicą rozważanego w zadaniu ciągu, o ile wykładnik w wyrażeniu $n^{p+5/2}$ będzie równy 0, czyli dla $p = -5/2$.

Odpowiedź: Dla $p = -5/2$ dana w zadaniu granica ciągu jest równa $10 \cdot \sqrt{5}$.

190. W każdym z zadań **190.1-190.10** podaj w postaci uproszczonej wartość granicy ciągu.

190.1. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} + \frac{1}{2n+3} + \dots + \frac{1}{2n+k} + \dots + \frac{1}{6n} \right) = \dots\dots\dots$

190.2. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+4} + \frac{1}{n+6} + \dots + \frac{1}{n+2k} + \dots + \frac{1}{9n} \right) = \dots\dots\dots$

190.3. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n+4} + \frac{1}{n+8} + \frac{1}{n+12} + \dots + \frac{1}{n+4k} + \dots + \frac{1}{81n} \right) = \dots\dots\dots$

190.4. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+1}{n^2+(n+1)^2} + \frac{n+2}{n^2+(n+2)^2} + \dots + \frac{k}{n^2+k^2} + \dots + \frac{7n}{50n^2} \right) = \dots\dots\dots$

190.5. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+1}{2n^2+(n+1)^2} + \frac{n+2}{2n^2+(n+2)^2} + \dots + \frac{k}{2n^2+k^2} + \dots + \frac{5n}{27n^2} \right) = \dots\dots\dots$

190.6. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{3n^2+1} + \frac{2}{3n^2+4} + \dots + \frac{k}{3n^2+k^2} + \dots + \frac{3n}{12n^2} \right) = \dots\dots\dots$

190.7. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n^2+1} + \frac{n}{n^2+4} + \dots + \frac{n}{n^2+k^2} + \dots + \frac{n}{2n^2} \right) = \dots\dots\dots$

190.8. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{3n^2+1} + \frac{n}{3n^2+4} + \dots + \frac{n}{3n^2+k^2} + \dots + \frac{n}{4n^2} \right) = \dots\dots\dots$

190.9. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{3n^2+1} + \frac{n}{3n^2+4} + \dots + \frac{n}{3n^2+k^2} + \dots + \frac{n}{12n^2} \right) = \dots\dots\dots$

190.10. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{3n^2+(n+1)^2} + \frac{n}{3n^2+(n+2)^2} + \dots + \frac{n}{3n^2+k^2} + \dots + \frac{n}{12n^2} \right) = \dots\dots\dots$

Zapisz swoje odpowiedzi i porównaj jutro z poprawnymi odpowiedziami.