

Dzień 9 (czwartek 26 marca 2020)

Dzisiejszy dzień rozpocznij od sprawdzenia swoich odpowiedzi do wczorajszego zadania.

190. W każdym z zadań **190.1-190.10** podaj w postaci uproszczonej wartość granicy ciągu.

$$190.1. \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} + \frac{1}{2n+3} + \dots + \frac{1}{2n+k} + \dots + \frac{1}{6n} \right) = \ln 3$$

$$190.2. \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+4} + \frac{1}{n+6} + \dots + \frac{1}{n+2k} + \dots + \frac{1}{9n} \right) = \ln 3$$

$$190.3. \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n+4} + \frac{1}{n+8} + \frac{1}{n+12} + \dots + \frac{1}{n+4k} + \dots + \frac{1}{81n} \right) = \ln 3$$

$$190.4. \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+1}{n^2+(n+1)^2} + \frac{n+2}{n^2+(n+2)^2} + \dots + \frac{k}{n^2+k^2} + \dots + \frac{7n}{50n^2} \right) = \ln 5$$

$$190.5. \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+1}{2n^2+(n+1)^2} + \frac{n+2}{2n^2+(n+2)^2} + \dots + \frac{k}{2n^2+k^2} + \dots + \frac{5n}{27n^2} \right) = \ln 3$$

$$190.6. \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{3n^2+1} + \frac{2}{3n^2+4} + \dots + \frac{k}{3n^2+k^2} + \dots + \frac{3n}{12n^2} \right) = \ln 2$$

$$190.7. \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n^2+1} + \frac{n}{n^2+4} + \dots + \frac{n}{n^2+k^2} + \dots + \frac{n}{2n^2} \right) = \frac{\pi}{4}$$

$$190.8. \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{3n^2+1} + \frac{n}{3n^2+4} + \dots + \frac{n}{3n^2+k^2} + \dots + \frac{n}{4n^2} \right) = \frac{\pi}{6 \cdot \sqrt{3}} \quad \left(= \frac{\pi \cdot \sqrt{3}}{18} \right)$$

$$190.9. \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{3n^2+1} + \frac{n}{3n^2+4} + \dots + \frac{n}{3n^2+k^2} + \dots + \frac{n}{12n^2} \right) = \frac{\pi}{3 \cdot \sqrt{3}} \quad \left(= \frac{\pi \cdot \sqrt{3}}{9} \right)$$

$$190.10. \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{3n^2+(n+1)^2} + \frac{n}{3n^2+(n+2)^2} + \dots + \frac{n}{3n^2+k^2} + \dots + \frac{n}{12n^2} \right) = \frac{\pi}{6 \cdot \sqrt{3}}$$

Obliczanie pól figur na płaszczyźnie.

Dziś opowiem Wam o zastosowaniu całek do obliczania wielkości (pól i długości) różnych figur płaskich.

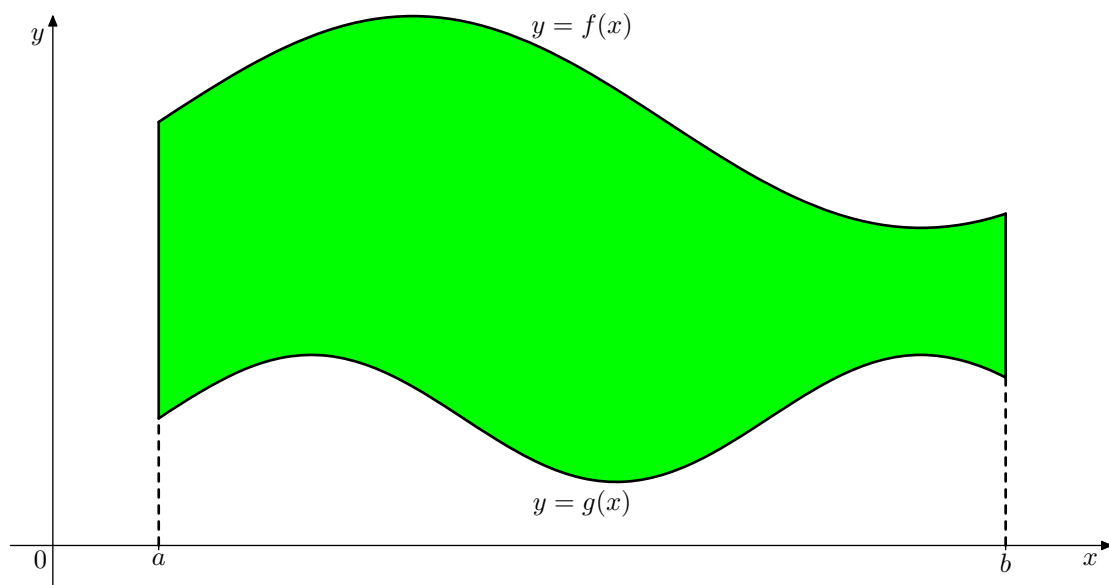
Na początek zagadnienie dość proste, więc nie poświęcę mu zbyt wiele uwagi.

Otóż przy pomocy całki oznaczonej można wyrazić pole obszaru o szczególnej postaci.

Niech dane będą funkcje ciągłe¹ $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ spełniające dla każdego $x \in [a, b]$ warunek $f(x) \geq g(x)$. Interesuje nas pole obszaru

$$\{(x, y) : a \leq x \leq b \wedge g(x) \leq y \leq f(x)\}$$

zamalowanego na zielono na rysunku 1.



rys. 1

Pole to wyraża się wzorem

$$\int_a^b f(x) - g(x) dx.$$

W przypadku, gdy f i g przyjmują tylko wartości nieujemne, zielony obszar to obszar pod wykresem funkcji f z usuniętym obszarem pod wykresem funkcji g , ma więc on pole

$$\int_a^b f(x) dx - \int_a^b g(x) dx = \int_a^b f(x) - g(x) dx.$$

I na tej uwadze, jeśli chodzi o wyjaśnienie powyższego wzoru, poprzestanę, koncentrując się na kolejnym, znacznie mniej oczywistym zagadnieniu.

¹Wystarczy, że funkcje te są całkowlalne, ale nie ma sensu topić istoty sprawy w niuansach dotyczących możliwego poluzowania założeń.

Długość krzywej na płaszczyźnie.

Czym jest długość krzywej? To pytanie nie na miejscu, jeśli najpierw nie odpowiemy sobie, czym jest krzywa. I czym jest krzywa, której długość można obliczać. Naiwne i zbyt swobodne rozumienie słowa "krzywa" może w skrajnym przypadku doprowadzić do patologii w stylu krzywej Peano², a przecież nie o to nam tu chodzi.

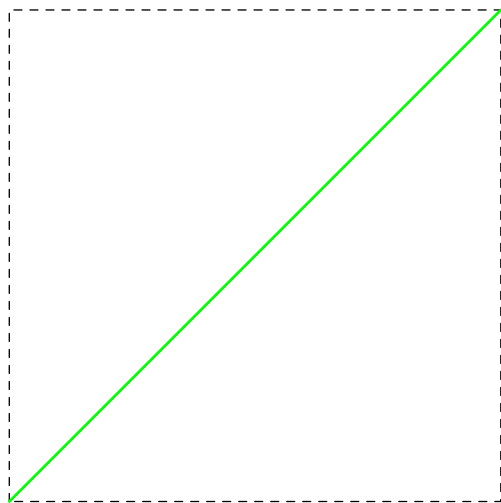
Odłożmy na razie problem wyjaśniania, czym jest krzywa, a skoncentrujmy się na zdefiniowaniu i obliczaniu długości krzywych, jeśli już to sobie kiedyś doprecyzujemy.

Jak definiowaliśmy i obliczaliśmy pola figur? Ano wykorzystywaliśmy do tego pewne szablony – proste figury, których wartość pola nie budziła żadnych wątpliwości. Tymi szablonami przybliżaliśmy coraz lepiej interesującą nas figurę, uzyskując coraz lepsze przybliżenie jej pola. Taka jest intuicja. Oczywiście musiało to mieć jakąś w miarę precyzyjną techniczną oprawę, ale istota polegała na przybliżaniu figury.

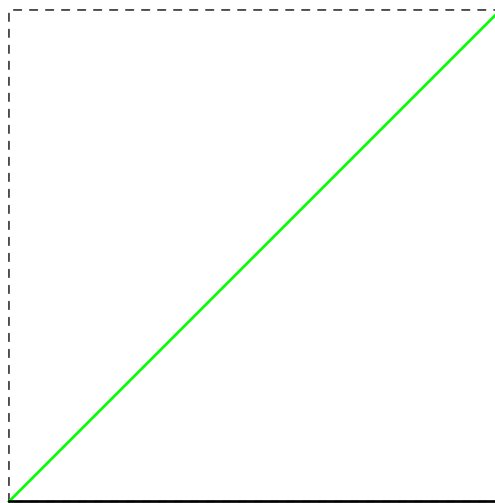
Korzystaliśmy z takiego oto, jak się okazało słusznego, założenia, że dobre przybliżenie figury daje dobre przybliżenie pola.

Do przybliżania obszarów pod wykresem funkcji wystarczyły w zupełności figury zbudowane z prostokątów. I takie proste szablony spróbujemy wykorzystać do obliczenia długości przekątnej kwadratu³ o boku 1 (rys. 2).

Żeby nie paprać się z twierdzeniem Pitagorasa i pierwiastkami, przybliżajmy tę przekątną łamanymi złożonymi tylko z odcinków poziomych i pionowych⁴. Coraz lepsze tego typu przybliżenia możemy zaobserwować na rysunkach 3–7.



rys. 2

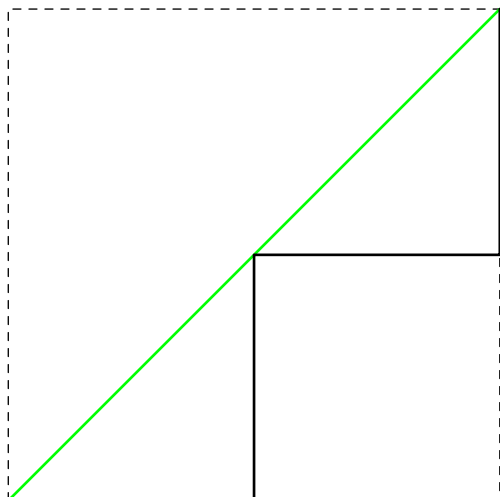


rys. 3

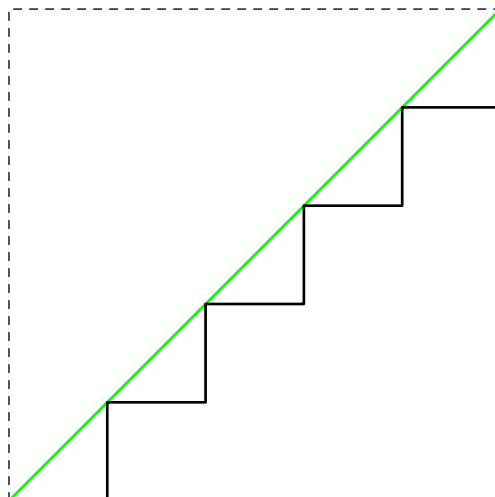
²Jest to "krzywa", która jest pełnym kwadratem. Pogooglaj sobie, jeśli Cię to interesuje.

³Najprzyjemniej oblicza się wielkości, których wartość już znamy.

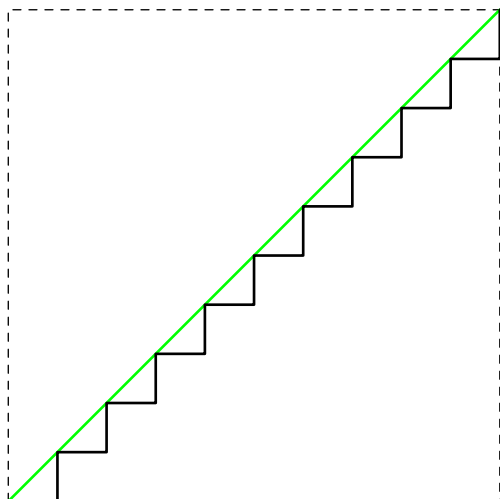
⁴Dla ustalenia uwagi przyjmijmy, że odcinki łamanej mają równą długość.



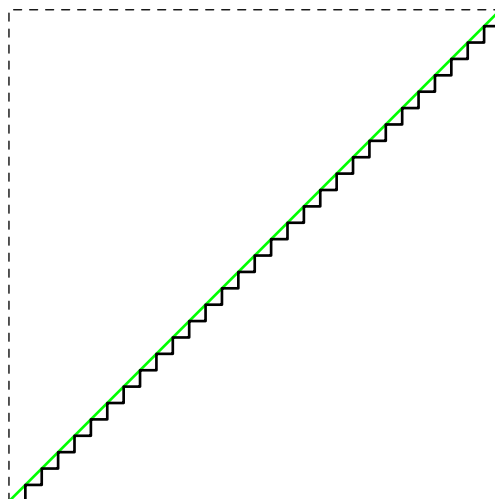
rys. 4



rys. 5



rys. 6



rys. 7

Bez trudu wyliczamy długość każdej z rozważanych łamanych – jest ona równa 2, gdyż odcinki pionowe tej łamanej mają łączną długość 1 i odcinki poziome też mają długość 1. Skoro przekątną kwadratu można dowolnie dobrze przybliżyć krzywą (w tym wypadku łamaną) o długości 2, to wychodziłoby z tego, że przekątna kwadratu o boku 1 ma długość 2. Podejrzewam, że w szkole uczono Was czegoś innego.

Morał stąd jest następujący:

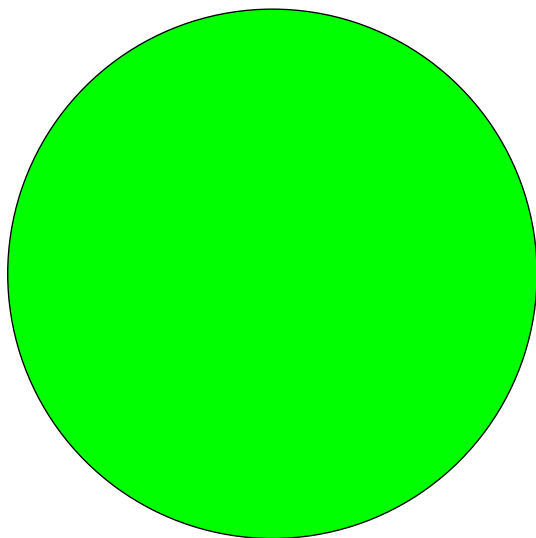
Dobre⁵ przybliżenie krzywej inną krzywą nie musi prowadzić do dobrego przybliżenia jej długości.

⁵W naiwnym rozumieniu.

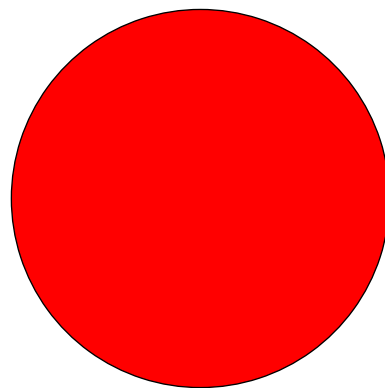
Popatrz teraz na rysunki 8 i 9 i odpowiedz na dwa pytania:

Która figura ma większe pole: czerwona czy zielona?

Obwód której figury ma większą długość: czerwonej czy zielonej?



rys. 8



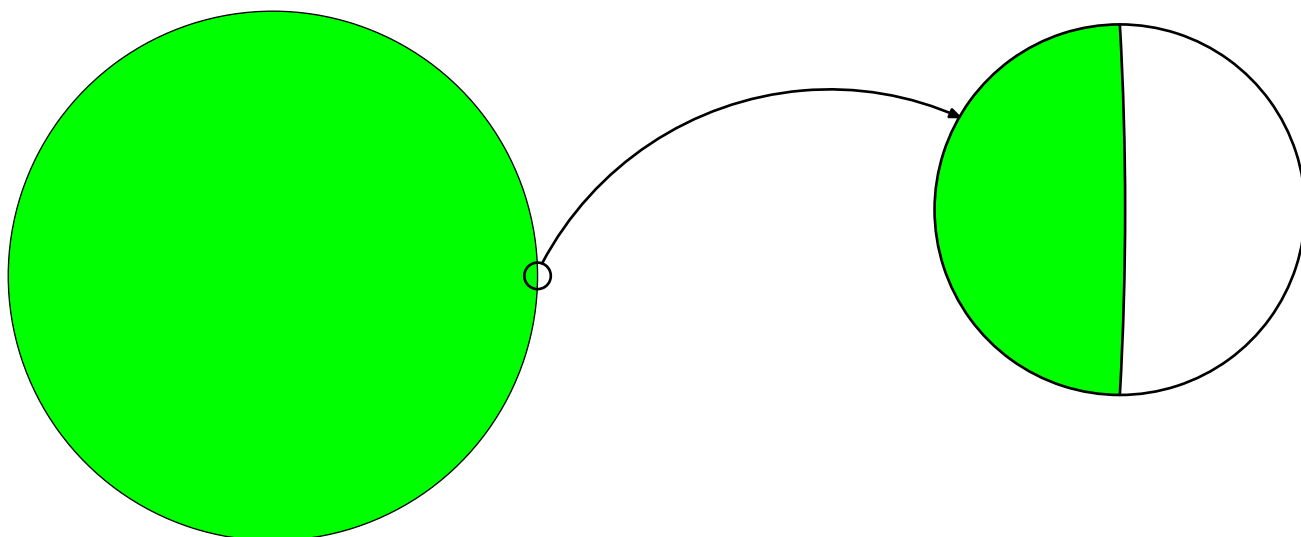
rys. 9

Jeśli twierdzisz, że większe pole ma figura zielona, trudno się z tym spierać. Nawet jeśli rysunek nie jest superdokładny, można z niego wzrokowo oszacować pola poszczególnych figur.

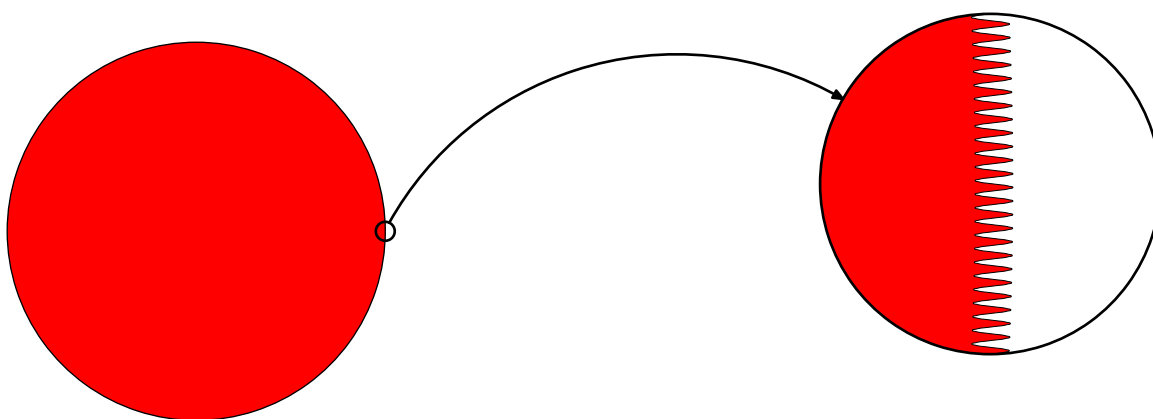
Ale dla oszacowania długości krzywej rysunek musi być nieskończenie dokładny.

Jeśli twierdzisz, że większy obwód ma figura zielona, Twoje twierdzenie jest co najmniej bezpodstawne, a w tym wypadku nawet fałszywe...

Patrząc na brzegi obu figur pod mikroskopem (rys. 10 i 11), można dostrzec, że brzeg figury zielonej jest taki, jakbyśmy oczekiwali, natomiast brzeg figury czerwonej jest mocno pozawijany, co ogromnie wpływa na długość obwodu tej figury. Ale wpływu na pole istotnego nie ma.



rys. 10



rys. 11

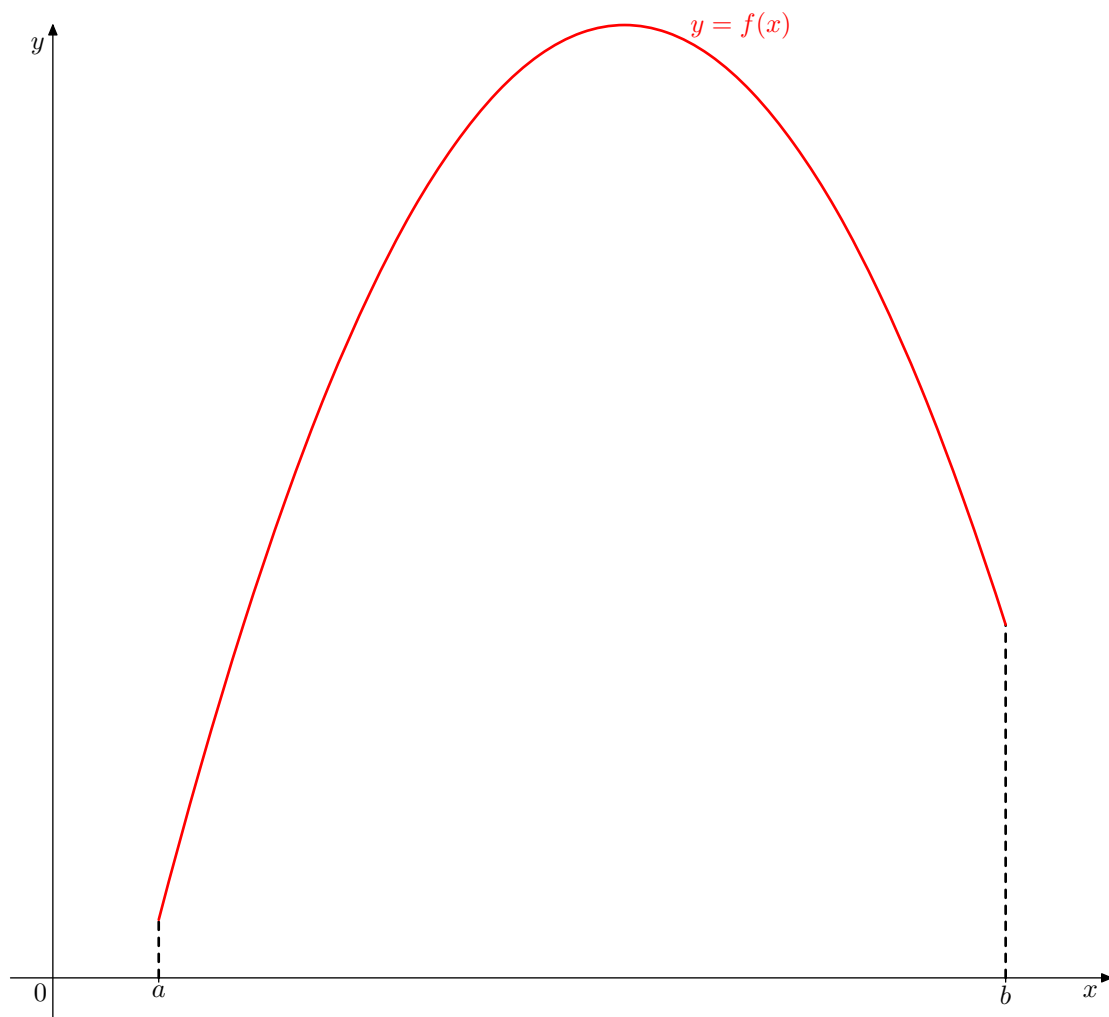
Podobne zjawisko wystąpiłoby, gdybyśmy patrzyli na mapę Polski i zastanawiali się nad powierzchnią kraju (to akurat na mapie "widać") oraz nad długością linii brzegowej – każdy, kto szedł brzegiem morza wie, że małe półwyspy i zatoczki uformowane przez morskie fale wydatnie wydłużają długość linii brzegowej, ale nie pokaże ich żadna mapa.

Te przykłady pokazują jak złudne jest naiwne przybliżanie jednej krzywej inną krzywą, gdy nie oczekujemy niczego więcej niż tylko tego, aby odpowiednie punkty obu krzywych były blisko siebie. Na długość ma ogromny wpływ pomarszczenie krzywej w mikro-skali. Eeeh... mniejsza o samą długość, to może wręcz uniemożliwić sensowne zdefiniowanie tejże długości.

Dlatego od przybliżenia jednej krzywej drugą krzywą będziemy oczekiwali nie tylko bliskości odpowiednich punktów, ale także dokładnego naśladowania kierunku. A żeby mówić o kierunku, trzeba mówić o stycznej, a styczna pachnie pochodną, a więc różniczkowalnością.

Zajmiemy się więc krzywymi, które są wykresami funkcji różniczkowalnych, najlepiej mających ciągłą pochodną.

Zagadnienie brzmi więc następująco: Dana jest funkcja⁶ $f \in C^1[a, b]$. Obliczyć długość krzywej będącej wykresem funkcji f (rysunek 12).

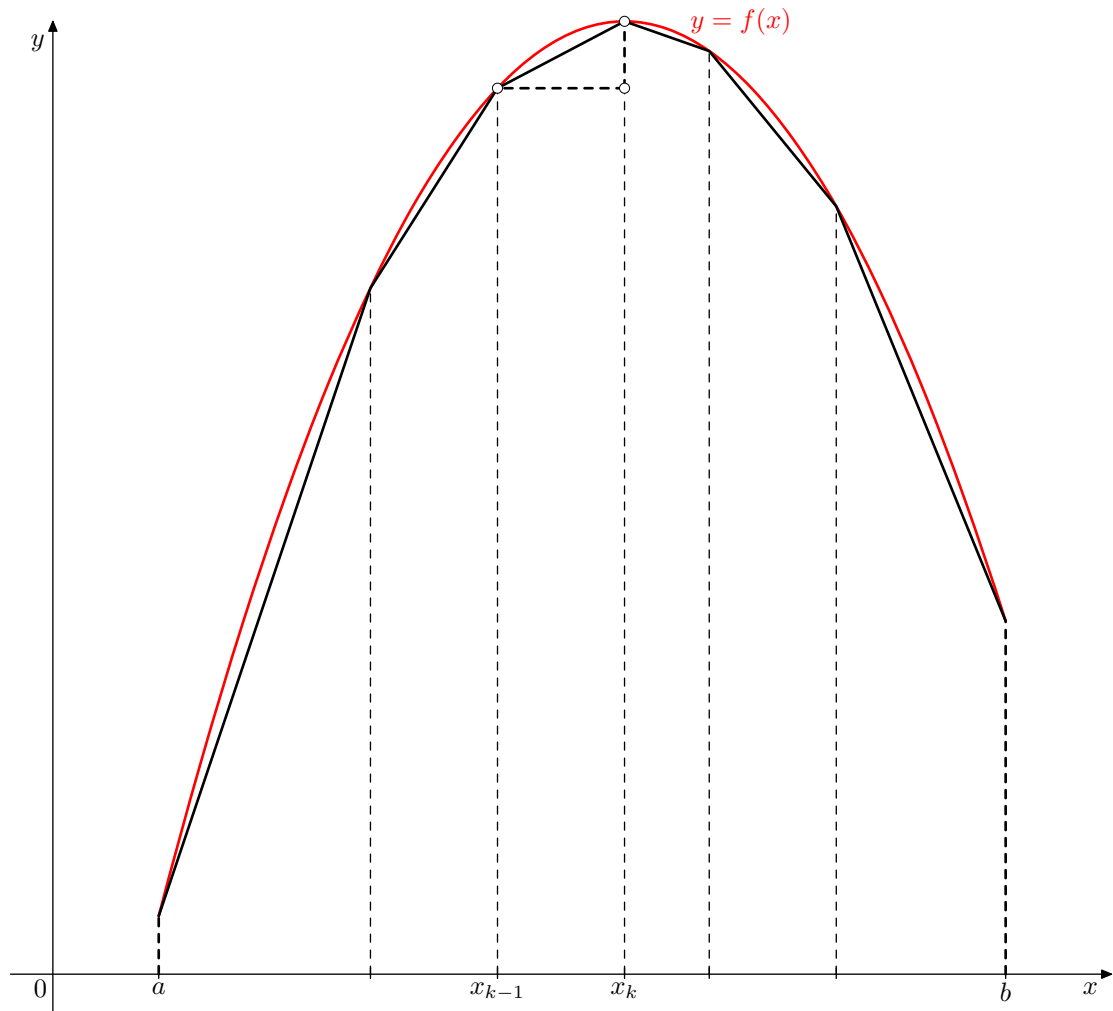


rys. 12

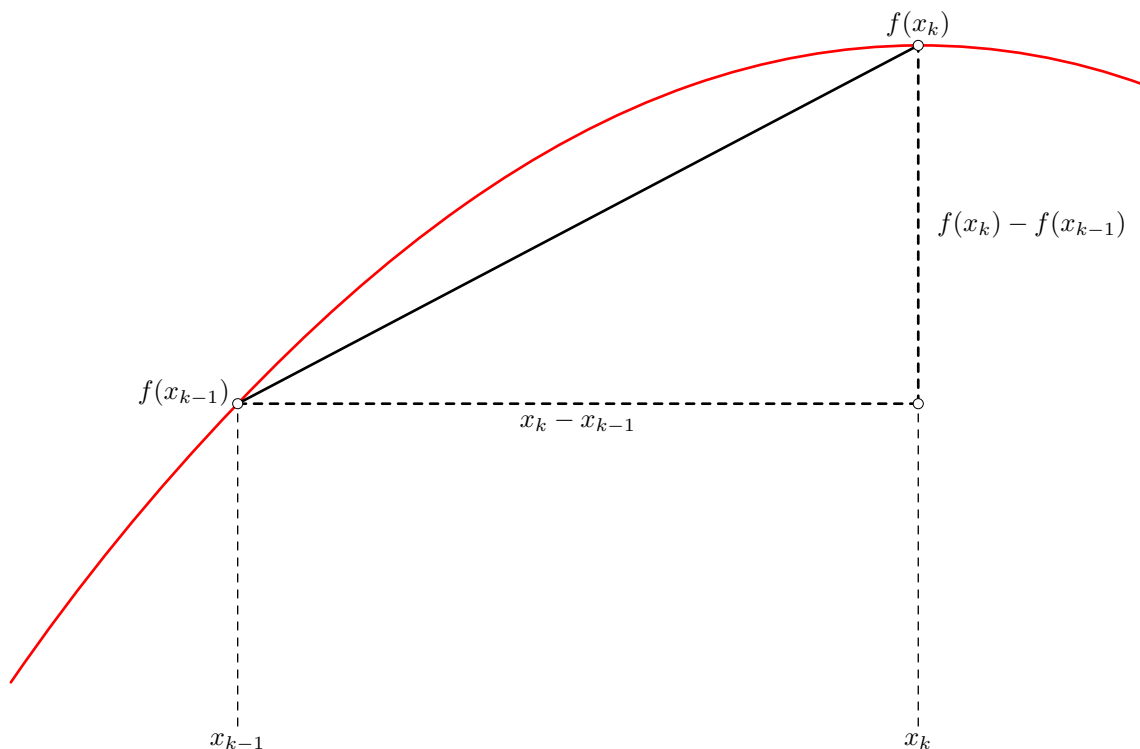
⁶Przypominam, że funkcja klasy $C^1[a, b]$ to funkcja różniczkowalna na przedziale $[a, b]$ – z pochodnymi jednostronnymi na końcach, gdzie dodatkowo zakładamy, że pochodna funkcji f jest ciągła i ma w punktach a, b granice równe odpowiednim pochodnym jednostronnym.

Dla podziału $(x_0, x_1, x_2, \dots, x_n)$ przedziału $[a, b]$ rozważmy łamaną wpisaną w wykres funkcji f , czyli łamaną o wierzchołkach $(x_k, f(x_k))$, przedstawioną na rysunku 13.

Jej długość jest sumą długości odcinków, które się na nią składają. Obliczmy długość k -tego odcinka, który w powiększeniu jest przedstawiony na rysunku 14.



rys. 13



rys. 14

Z twierdzenia Pitagorasa wynika, że długość k -tego odcinka łamanej jest równa

$$\begin{aligned} \sqrt{(x_k - x_{k-1})^2 + (f(x_k) - f(x_{k-1}))^2} &= (x_k - x_{k-1}) \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}} \right)^2} = \\ &= (x_k - x_{k-1}) \cdot \sqrt{1 + (f'(y_k))^2}, \end{aligned}$$

gdzie $y_k \in (x_{k-1}, x_k)$ istnieje na mocy twierdzenia Lagrange'a o wartości średniej.

To prowadzi do następującego wzoru na długość łamanej:

$$\sum_{k=1}^n (x_k - x_{k-1}) \cdot \sqrt{1 + (f'(y_k))^2}.$$

Powyższe rachunki przeprowadzone są dla pojedynczego podziału przedziału $[a, b]$, który to podział oznaczyliśmy przez $(x_0, x_1, x_2, \dots, x_n)$. Zamiast tego przyjmijmy, że dany mamy ciąg podziałów o średnicy dążącej do zera, niech n -tym podziałem ciągu będzie $(x_{n,0}, x_{n,1}, x_{n,2}, \dots, x_{n,n})$.

Wówczas otrzymamy nie pojedynczą łamaną, ale ciąg łamanych, których długości tworzą ciąg liczbowy o n -tym wyrazie równym:

$$\sum_{k=1}^n (x_{n,k} - x_{n,k-1}) \cdot \sqrt{1 + (f'(y_{n,k}))^2},$$

gdzie $y_{n,k} \in (x_{n,k-1}, x_{n,k})$.

W tym ciągu liczbowym możemy rozpoznać sumy całkowe Riemanna dążące do całki

$$\int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx,$$

która to całka wyraża szukaną długość wykresu funkcji f .

Wzór do zapamiętania:

Długość krzywej będącej wykresem funkcji różniczkowalnej f na przedziale $[a, b]$ jest równa

$$\int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$$

Niestety, kwadrat pochodnej pod pierwiastkiem w funkcji podcałkowej powoduje, że nawet dla stosunkowo prostych funkcji obliczenie długości ich wykresu jest trudne lub wręcz niemożliwe.

Obejrzyj w internecie wykład doc. Górniaka z PWr:

Odcinek **80**: Obliczanie długości łuków (tylko do minuty 18:55).

Nie musisz zwracać uwagi na detale całkowania przy obliczeniu długości łuku paraboli.

Dwa zadania do rozwiązania.

191. Obliczyć długość krzywej

$$\left\{ \left(x, \frac{2}{3} \cdot x^{3/2} \right) : x \in [0, 15] \right\}.$$

Zanim zajrzysz na kolejną stronę, rozwiąż powyższe zadanie, a przynajmniej podejmij próbę rozwiązania, aby wiedzieć, gdzie napotykasz trudności.

Rozwiązanie:

Zgodnie ze wzorem na długość krzywej będącej wykresem funkcji $f(x) = \frac{2}{3} \cdot x^{3/2}$ na przedziale $[a, b] = [0, 15]$ otrzymujemy:

$$\begin{aligned} \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} \, dx &= \int_0^{15} \sqrt{1 + (\sqrt{x})^2} \, dx = \int_0^{15} \sqrt{1 + x} \, dx = \frac{2 \cdot (x+1)^{3/2}}{3} \Big|_{x=0}^{15} = \\ &= \frac{2}{3} \cdot (64 - 1) = \frac{2}{3} \cdot 63 = 42. \end{aligned}$$

Odpowiedź:

Dana w zadaniu krzywa ma długość 42.

192. Obliczyć długość krzywej

$$\{(x, x^{3/2}) : x \in [0, 13]\}.$$

Zapisać wynik w postaci liczby całkowitej.

Zanim zajrzysz na kolejną stronę, rozwiąż powyższe zadanie, a przynajmniej podejmij próbę rozwiązania, aby wiedzieć, gdzie napotykasz trudności.

Rozwiązanie:

Zgodnie ze wzorem na długość krzywej będącej wykresem funkcji $f(x) = x^{3/2}$ na przedziale $[a, b] = [0, 13]$ otrzymujemy:

$$\begin{aligned} \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx &= \int_0^{13} \sqrt{1 + \left(\frac{3}{2} \cdot \sqrt{x}\right)^2} dx = \int_0^{13} \sqrt{1 + \frac{9}{4} \cdot x} dx = \frac{8 \cdot \left(\frac{9}{4} \cdot x + 1\right)^{3/2}}{27} \Bigg|_{x=0}^{13} = \\ &= \frac{8}{27} \cdot \left(\left(\frac{9 \cdot 13 + 4}{4} \right)^{3/2} - 1 \right) = \frac{8}{27} \cdot \left(\left(\frac{117 + 4}{4} \right)^{3/2} - 1 \right) = \frac{8}{27} \cdot \left(\left(\frac{121}{4} \right)^{3/2} - 1 \right) = \\ &= \frac{8}{27} \cdot \left(\frac{1331}{8} - 1 \right) = \frac{1331 - 8}{27} = \frac{1323}{27} = \frac{1350 - 27}{27} = \frac{\frac{2700}{2} - 27}{27} = \frac{100}{2} - 1 = 49. \end{aligned}$$

Odpowiedź: Dana w zadaniu krzywa ma długość 49.