

Dzień 10 (piątek 27 marca 2020)**Środki ciężkości figur płaskich.**

Czym jest środek ciężkości¹ figury, najłatwiej wyobrazić sobie na przykładzie figury płaskiej. Jeżeli figurą tą jest pewien obszar na płaszczyźnie, to wycinając ten obszar z jednorodnego² sztywnego kartonu albo blachy, możemy próbować balansować wycięty obszar na czubku zaostrego ołówka. Środkiem ciężkości jest punkt, który umieszczony na ostrzu ołówka da nam chwilowe poczucie równowagi³. Jeśli ostrze ołówka będzie trochę stępione, to może nam się nawet udać uzyskanie równowagi trwałej.

Analogicznie będziemy rozumieli środek ciężkości krzywej płaskiej. Krzywą taką trzeba wygiąć z cienkiego, ale masywnego jednorodnego drutu, a następnie położyć na nieważkiej⁴ sztywnej powierzchni płaskiej (najlepiej do niej przykleić, żeby się nie ślizgała). Wówczas drut wraz z nieważką powierzchnią będą tworzyć bryłę⁵ sztywną, w której za sztywność i możliwość podpierania w dowolnym punkcie odpowiada nieważka powierzchnia, a za rozmieszczenie masy odpowiada drut. Tak samo moglibyśmy próbować balansować tę bryłę na czubku ołówka – uda się to tylko wtedy, gdy podeprzemy ją w środku ciężkości krzywej.

Podobnie wygląda interpretacja środka ciężkości układu mas punktowych. Trzeba je przykleić do nieważkiej sztywnej powierzchni płaskiej i tak otrzymany twór balansować na czubku ołówka.

W szkolnej matematyce "środek ciężkości" kojarzy się przede wszystkim ze środkiem ciężkości trójkąta, a ten definiowany jest jako punkt przecięcia środkowych. I tyle. Ani słowa o masach, czy jakiegokolwiek fizyce. No tak, ale przecież ta nazwa nie powstała w oderwaniu od fizycznego środka ciężkości. Tylko czymże jest środek ciężkości trójkąta?

Można pomyśleć o trzech możliwościach:

- Środek ciężkości powierzchni trójkąta, czyli trójkąta wyciętego z kartonu.
- Środek ciężkości obwodu trójkąta, czyli obwodu trójkąta wygiętego z drutu.
- Środek ciężkości wierzchołków trójkąta, czyli trzech jednakowych mas punktowych umieszczonych w wierzchołkach.

Zanim zajrzysz na kolejną stronę, zastanów się nad odpowiedzią na następujące pytania:

Czy w ogólnym trójkącie powyższe trzy środki ciężkości leżą w jednym punkcie, czy też mogą to być różne punkty?

Jeśli różne, to który z nich jest środkiem ciężkości znanym z geometrii trójkąta?

¹W naszych zastosowaniach można również mówić "środek masy". W zasadzie właśnie o środek masy nam chodzi, ale w geometrii zwykło się mówić o środku ciężkości figury. Z punktu widzenia fizyki oba pojęcia są tożsame w jednorodnym polu grawitacyjnym.

²Oczywiście materiał mógłby być niejednorodny, wtedy trzeba byłoby uwzględnić zmieniającą się gęstość powierzchniową (ewentualnie liniową w przypadku krzywej). Nie wnosi to jednak żadnych nowych zjawisk, a jedynie komplikuje otrzymane wzory – aż taka ogólność nie jest nam tu potrzebna.

³Podparcie obszaru w jakimkolwiek innym punkcie nie uda się nawet na moment.

⁴W praktyce: bardzo lekkiej.

⁵Słowo "bryła" kojarzy się z tworem trójwymiarowym, podczas gdy tu mamy twór płaski. Jednak patrząc na ten model (powierzchnia + drut) w świecie trójwymiarowym widzimy twór trójwymiarowy, o zaniedbywalnie małej grubości.

Podstawowa własność środka ciężkości układu mas, nieważne czy punktowych, czy o gęstości liniowej (druć), czy powierzchniowej (blacha) czy nawet objętościowej (bryła trójwymiarowa), jest następująca:

Możemy wybrać dowolną część masy wchodzącej w skład układu mas, a następnie zsunąć te masy do ich środka ciężkości. Wtedy środek ciężkości całego układu mas nie ulegnie zmianie.

Wracając do trójkąta: Środek ciężkości odcinka (w domyśle: wykonanego z jednorodnego materiału) leży w geometrycznym środku odcinka, a masa tegoż odcinka jest wprost proporcjonalna do jego długości. Tak więc środek ciężkości obwodu trójkąta (w domyśle: wygiętego z jednorodnego drutu) jest taki, jak gdyby w środkach boków trójkąta umieścić masy punktowe proporcjonalne do długości tychże boków.

Rozważmy trójkąt równoramienny o bardzo krótkiej podstawie i bardzo długich ramionach. Jego geometryczny środek ciężkości leży w $1/3$ wysokości. Jednak obwód tego trójkąta składa się z dwóch prawie pokrywających się odcinków (ramion) i podstawy zaniedbywalnej pod względem masy. Zatem środek ciężkości obwodu leży prawie w połowie wysokości trójkąta. Skoro oba środki ciężkości⁶ leżą w różnych odległościach od podstawy trójkąta, to znaczy, że się nie pokrywają. Tak więc środek ciężkości obwodu trójkąta to na ogół nie to samo, co geometryczny środek ciężkości (czyli punkt przecięcia środkowych).

Okazuje się jednak, że środek ciężkości wierzchołków trójkąta pokrywa się ze środkiem ciężkości trójkąta wyciętego z kartonu i jest to geometryczny środek trójkąta⁷.

Nie będę wchodził w szczegóły, dlaczego tak jest, gdyż nie jest to główny temat wykładu.

Zamiast tego zajmiemy się obliczaniem położenia środka ciężkości. Zaczniemy od przypadku mas punktowych. Niech dla $k = 1, 2, \dots, n$ punkt materialny o masie m_k będzie umieszczony w punkcie (x_k, y_k) . Wówczas środek ciężkości tak rozmieszczonych n mas punktowych znajduje się w punkcie

$$\left(\frac{\sum_{k=1}^n m_k x_k}{\sum_{k=1}^n m_k}, \frac{\sum_{k=1}^n m_k y_k}{\sum_{k=1}^n m_k} \right).$$

Zauważmy, że w mianownikach jest suma wszystkich mas, czyli łączna masa całego układu n mas. W licznikach są natomiast prawie takie same sumy, z tym że poszczególne składniki są przemnożone przez współrzędne odpowiadające położeniu poszczególnych mas.

Czasami mówi się, że współrzędne środka masy są średnimi ważonymi odpowiednich współrzędnych punktów materialnych wchodzących w skład układu mas.

⁶Geometryczny środek ciężkości trójkąta oraz środek ciężkości obwodu trójkąta.

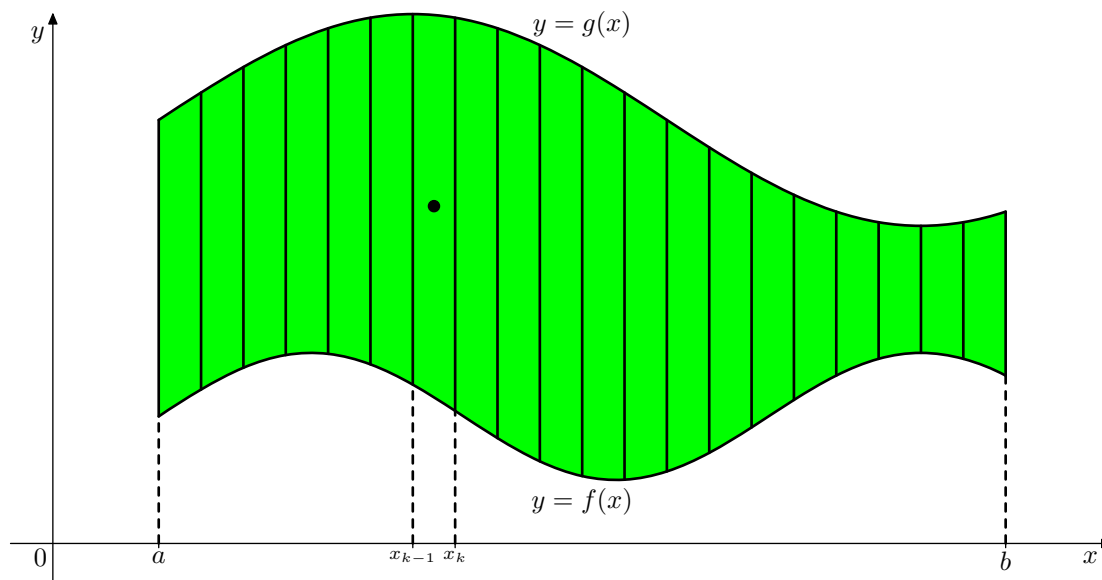
⁷Analogicznie jest w przestrzeni trójwymiarowej. Geometryczny środek ciężkości czworościanu to zarówno środek ciężkości pełnej bryły czworościennej jak i środek ciężkości jednakowych mas umieszczonych w wierzchołkach czworościanu. Czym innym jest środek ciężkości powierzchni czworościanu (ściany z blachy), a jeszcze czym innym środek ciężkości krawędzi (szkielet czworościanu wykonany z drutu).

Środek ciężkości obszaru na płaszczyźnie.

Bez wchodzenia w nadmierne formalizmy⁸, wyprowadzę wzór na środek ciężkości obszaru

$$\{(x, y) : x \in [a, b] \wedge f(x) \leq y \leq g(x)\},$$

gdzie funkcje ciągłe $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ spełniają nierówność $f(x) \leq g(x)$ dla każdego $x \in [a, b]$.



rys. 1

Podzielmy przedział $[a, b]$ na małe przedziałiki (rys. 1). To prowadzi do podziału rozważanej figury na paski o szerokości⁹ $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$. Pole takiego paska jest iloczynem jego szerokości Δx_k przez jego długość, która jest z grubsza równa $g(x_k) - f(x_k)$.

Wobec tego pole całej figury jest w przybliżeniu równe¹⁰

$$\sum_k \left(g(x_k) - f(x_k) \right) \cdot \Delta x_k.$$

W rozważaniach fizycznych przejście do granicy z sumami całkowitymi Riemanna często odbywa się przy pomocy formuły w stylu: jak paski staną się nieskończenie wąskie, to otrzymamy dokładną wartość pola, a suma przekształci się w całkę¹¹

$$\int_a^b g(x) - f(x) dx.$$

Na razie otrzymaliśmy znany nam już wzór na pole figury¹².

⁸A dokładniej: w konwencji, którą można spotkać w fizyce.

⁹Literka Δ w fizyce odnosi się do przyrostu następującej po niej wielkości. Oznaczenie Δx_k należy rozumieć nie jako przyrost x_k (czyli $\Delta(x_k)$), co specjalnie nie ma sensu, ale jako k -ty przyrost x 'a, czyli $(\Delta x)_k$.

¹⁰W tej konwencji pod znakiem sumy piszemy tylko indeks numerujący **wszystkie** paski, nie precyzując wyraźnie zakresu zmiennej tego indeksu.

¹¹Przy tym Δx_k (a w niektórych wersjach Δx) zamienia się w dx .

¹²Nie dbam o zmianę roli f i g w stosunku do oznaczeń z wczorajszego wykładu.

Środek ciężkości k -tego paska¹³ leży z grubsza w połowie jego długości¹⁴, w przybliżeniu w punkcie

$$\left(\frac{x_{k-1} + x_k}{2}, \frac{f(x_k) + g(x_k)}{2} \right),$$

co przy bardzo wąskim pasku jest w przybliżeniu równe mniej dokładnemu, ale prostszemu punktowi¹⁵

$$(x_k, y_k) = \left(x_k, \frac{f(x_k) + g(x_k)}{2} \right).$$

Biorąc pod uwagę, że masa¹⁶ tegoż paska jest z grubsza równa $m_k = (g(x_k) - f(x_k)) \cdot \Delta x_k$, otrzymujemy przybliżone współrzędne środka ciężkości obszaru jako

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\sum_k x_k m_k}{\sum_k m_k}, \frac{\sum_k y_k m_k}{\sum_k m_k} \right) = \\ & = \left(\frac{\sum_k x_k \cdot (g(x_k) - f(x_k)) \cdot \Delta x_k}{\sum_k (g(x_k) - f(x_k)) \cdot \Delta x_k}, \frac{\sum_k \frac{f(x_k) + g(x_k)}{2} \cdot (g(x_k) - f(x_k)) \cdot \Delta x_k}{\sum_k (g(x_k) - f(x_k)) \cdot \Delta x_k} \right), \end{aligned}$$

co przy nieskończenie wąskich paskach daje dokładne położenie środka ciężkości obszaru wyrażone przy pomocy całek:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\int_a^b x \cdot (g(x) - f(x)) dx}{\int_a^b g(x) - f(x) dx}, \frac{\int_a^b \frac{f(x) + g(x)}{2} \cdot (g(x) - f(x)) dx}{\int_a^b g(x) - f(x) dx} \right) = \\ & = \left(\frac{\int_a^b x \cdot (g(x) - f(x)) dx}{\int_a^b g(x) - f(x) dx}, \frac{\frac{1}{2} \cdot \int_a^b (g(x))^2 - (f(x))^2 dx}{\int_a^b g(x) - f(x) dx} \right). \end{aligned}$$

Najpierw dwa zadania, a potem coś o krzywych.

193. Wiadomo, że jeżeli funkcje ciągłe $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ spełniają nierówność $f(x) \leq g(x)$ dla każdego $x \in [a, b]$, to środek ciężkości figury

$$\{(x, y) : x \in [a, b] \wedge f(x) \leq y \leq g(x)\}$$

leży w punkcie $\left(\frac{X}{P}, \frac{Y}{P} \right)$, gdzie

$$X = \int_a^b x \cdot (g(x) - f(x)) dx, \quad Y = \frac{1}{2} \cdot \int_a^b (g(x))^2 - (f(x))^2 dx, \quad P = \int_a^b g(x) - f(x) dx.$$

Wyznaczyć środek ciężkości obszaru ograniczonego parabolą o równaniu $y = x^2$ i prostą o równaniu $y = x$.

Zanim zajrzysz na kolejną stronę, rozwiąż powyższe zadanie, a przynajmniej podejmij próbę rozwiązania, aby wiedzieć, gdzie napotkasz trudności.

¹³Duża czarna kropka na rysunku 1.

¹⁴I z grubsza w połowie szerokości.

¹⁵Drugą współrzędną dla krótkości oznaczamy przez y_k .

¹⁶Czyli pole. Dla figury wyciętej z jednorodnego materiału masa jest proporcjonalna do pola.

Rozwiązanie:

Ponieważ dane w zadaniu parabola i prosta przecinają się w punktach $(0, 0)$ i $(1, 1)$, a przy tym $x^2 \leq x$ dla $x \in [0, 1]$, przeprowadzamy obliczenia dla $[a, b] = [0, 1]$, $f(x) = x^2$ oraz $g(x) = x$. Otrzymujemy kolejno:

$$X = \int_0^1 x \cdot (x - x^2) dx = \int_0^1 x^2 - x^3 dx = \left. \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \right|_{x=0}^1 = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12},$$

$$Y = \frac{1}{2} \cdot \int_0^1 x^2 - x^4 dx = \left. \frac{x^3}{6} - \frac{x^5}{10} \right|_{x=0}^1 = \frac{1}{6} - \frac{1}{10} = \frac{5-3}{30} = \frac{1}{15},$$

$$P = \int_0^1 x - x^2 dx = \left. \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right|_{x=0}^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}.$$

W rezultacie współrzędne środka ciężkości danej figury to $X/P = (1/12)/(1/6) = 1/2$ oraz $Y/P = (1/15)/(1/6) = (2/5)$.

Odpowiedź:

Środek ciężkości danej figury leży w punkcie $(1/2, 2/5)$.

194. Wiadomo, że jeżeli funkcje ciągłe $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ spełniają nierówność $f(x) \leq g(x)$ dla każdego $x \in [a, b]$, to środek ciężkości figury

$$\{(x, y) : x \in [a, b] \wedge f(x) \leq y \leq g(x)\}$$

leży w punkcie $\left(\frac{X}{P}, \frac{Y}{P}\right)$, gdzie

$$X = \int_a^b x \cdot (g(x) - f(x)) dx, \quad Y = \frac{1}{2} \cdot \int_a^b (g(x))^2 - (f(x))^2 dx, \quad P = \int_a^b g(x) - f(x) dx.$$

Wyznaczyć środek ciężkości (x_n, y_n) obszaru Z_n ograniczonego prostą o równaniu $y = x$ i krzywą o równaniu $y = |x| \cdot \sqrt[n]{|x|}$.

Obliczyć graniczne wartości $x_G = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ oraz $y_G = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$. Jakiej zależności między x_G i y_G powinniśmy oczekiwać i dlaczego?

Zanim zajrzysz na kolejną stronę, rozwiąż powyższe zadanie, a przynajmniej podejmij próbę rozwiązania, aby wiedzieć, gdzie napotykasz trudności.

Rozwiązanie:

Ponieważ dane w zadaniu krzywa i prosta przecinają się w punktach $(0, 0)$ i $(1, 1)$, a przy tym $|x| \cdot \sqrt[n]{|x|} \leq x$ dla $x \in [0, 1]$, przeprowadzamy obliczenia dla $[a, b] = [0, 1]$, $f(x) = x^{(n+1)/n}$ oraz $g(x) = x$. Otrzymujemy kolejno:

$$X = \int_0^1 x \cdot (x - x^{(n+1)/n}) dx = \int_0^1 x^2 - x^{(2n+1)/n} dx = \frac{x^3}{3} - \frac{x^{(3n+1)/n}}{(3n+1)/n} \Big|_{x=0}^1 = \frac{1}{3} - \frac{n}{3n+1} =$$

$$= \frac{1}{3 \cdot (3n+1)},$$

$$Y = \frac{1}{2} \cdot \int_0^1 x^2 - x^{2(n+1)/n} dx = \frac{x^3}{6} - \frac{x^{(3n+2)/n}}{2 \cdot (3n+2)/n} \Big|_{x=0}^1 = \frac{1}{6} - \frac{n}{2 \cdot (3n+2)} = \frac{1}{3 \cdot (3n+2)},$$

$$P = \int_0^1 x - x^{(n+1)/n} dx = \frac{x^2}{2} - \frac{x^{(2n+1)/n}}{(2n+1)/n} \Big|_{x=0}^1 = \frac{1}{2} - \frac{n}{2n+1} = \frac{1}{2 \cdot (2n+1)}.$$

W rezultacie współrzędne środka ciężkości figury Z_n to

$$x_n = \frac{X}{P} = \frac{2 \cdot (2n+1)}{3 \cdot (3n+1)} \quad \text{oraz} \quad y_n = \frac{Y}{P} = \frac{2 \cdot (2n+1)}{3 \cdot (3n+2)}.$$

Wobec tego $x_G = y_G = 4/9$.

Dla bardzo dużych n obszar Z_n jest nieznacznie pogrubionym odcinkiem o końcach $(0, 0)$ i $(1, 1)$, więc należy oczekiwać, że jego środek ciężkości leży bardzo blisko tego odcinka. W konsekwencji **należy oczekiwać, że $x_G = y_G$** .

Środek ciężkości krzywej płaskiej.

Teraz zajmijmy się środkiem ciężkości krzywej

$$\{(x, f(x)) : x \in [a, b]\},$$

gdzie funkcja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ jest różniczkowalna i ma ciągłą pochodną¹⁷.

Podzielmy przedział $[a, b]$ na małe przedziały i przyjrzyjmy się k -temu przedziałowi długości $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ (rys. 2).

Odpowiada mu cięciwa¹⁸ długości $\sqrt{1 + (f'(c))^2} \cdot \Delta x_k$, gdzie c należące do przedziału istnieje na mocy twierdzenia Lagrange'a o wartości średniej¹⁹. Jeśli przedział jest bardzo mały, to zamiast c można wziąć inny jego punkt, popełnimy wtedy niewielki błąd. Także środek ciężkości cięciwy, leżący w jej połowie, może być z małą szkodą dla dokładności wyliczeń przesunięty do jednego jej końca. Możemy więc dla celu przybliżonych rachunków przyjąć, że k -ta cięciwa ma masę (czyli długość)

$$m_k = \sqrt{1 + (f'(x_k))^2} \cdot \Delta x_k,$$

¹⁷Dokładniej: zakładamy, że $f \in C^1[a, b]$, czyli f jest różniczkowalna na przedziale $[a, b]$ – z pochodnymi jednostronnymi na końcach, gdzie dodatkowo zakładamy, że pochodna funkcji f jest ciągła i ma w punktach a, b granice równe odpowiednim pochodnym jednostronnym.

¹⁸Wiem, wiem, jestem niekonsekwentny – jak jest przedział, to powinna mu odpowiadać cięciwa.

¹⁹Zobacz korona09, strona 86.

która to masa jest skupiona w punkcie

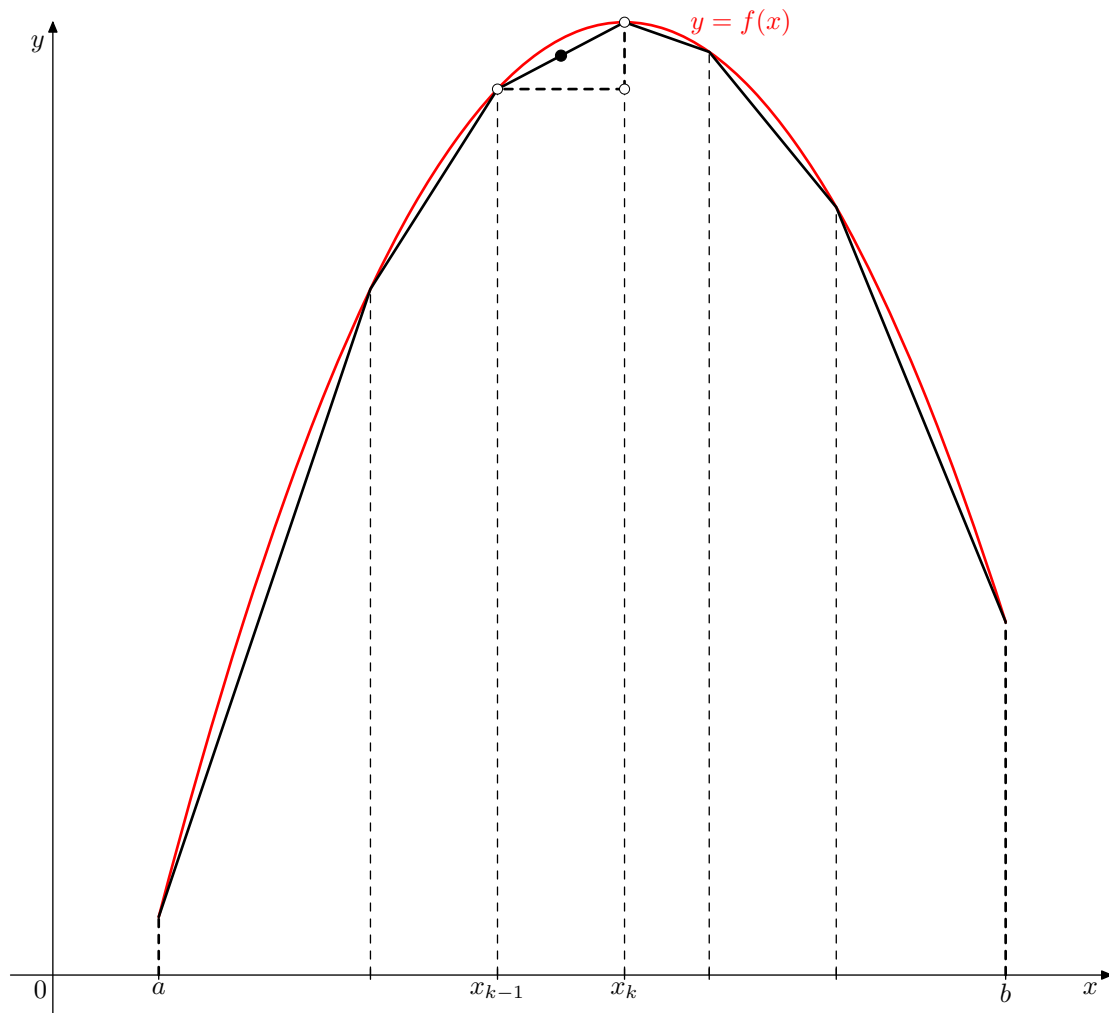
$$(x_k, y_k) = (x_k, f(x_k)) .$$

Wówczas środek ciężkości krzywej leży w przybliżeniu w punkcie

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\sum_k x_k m_k}{\sum_k m_k}, \frac{\sum_k y_k m_k}{\sum_k m_k} \right) = \\ & = \left(\frac{\sum_k x_k \cdot \sqrt{1 + (f'(x_k))^2} \cdot \Delta x_k}{\sum_k \sqrt{1 + (f'(x_k))^2} \cdot \Delta x_k}, \frac{\sum_k f(x_k) \cdot \sqrt{1 + (f'(x_k))^2} \cdot \Delta x_k}{\sum_k \sqrt{1 + (f'(x_k))^2} \cdot \Delta x_k} \right), \end{aligned}$$

co przy nieskończeniu małych przedziałkach daje dokładne położenie środka ciężkości krzywej wyrażone przy pomocy całek:

$$\left(\frac{\int_a^b x \cdot \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx}{\int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx}, \frac{\int_a^b f(x) \cdot \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx}{\int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx} \right) .$$



rys. 2