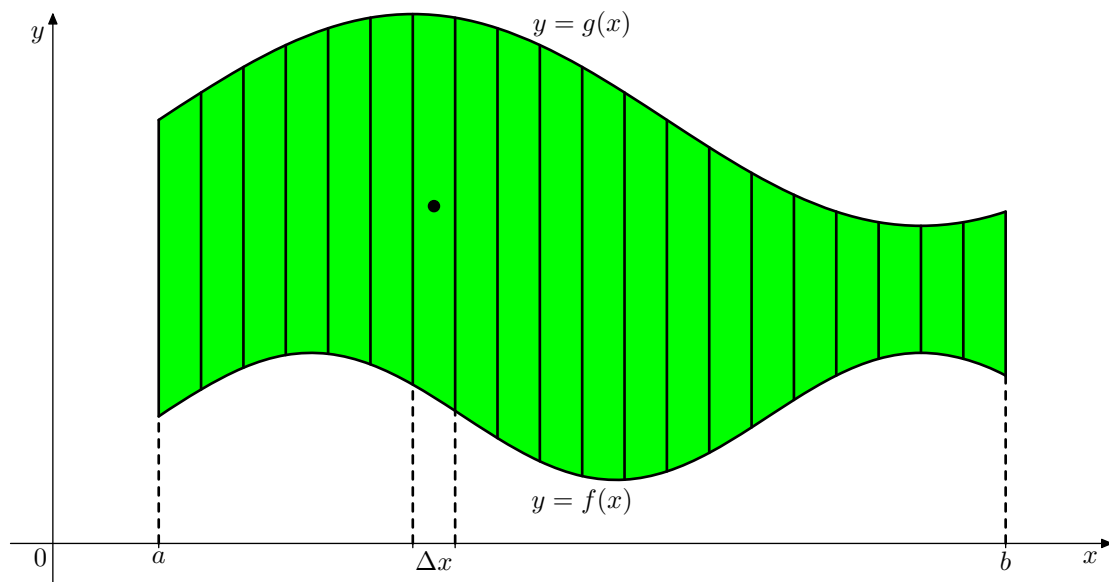


Dzień 11 (poniedziałek 30 marca 2020)**Obejrzyj w internecie wykład doc. Górniaka z PWr:**

Odcinek 79: Obliczanie objętości brył obrotowych

Dziś przedstawię wyprowadzenie wzorów związanych z przestrzennymi figurami obrotowymi. Nie stawiam sobie za cel matematycznej precyzji, a zależy mi jedynie na pokazaniu dlaczego wzory są takie, a nie inne. Wykład będzie utrzymany w konwencji rozumowań stosowanych w fizyce.

Bryły obrotowe.

rys. 1

Podzielmy obszar przedstawiony na rysunku 1 na wąskie paski¹.

¹Nie będę ich numerować, a znak sumy odnosić się będzie do sumowania po wszystkich paskach podziału, ile ich tam jest.

Obracając wokół osi OX pasek² wyróżniony na rysunku otrzymamy gruby pierścień kołowy o promieniu wewnętrznym $f(x)$, promieniu zewnętrznym $g(x)$ oraz grubości Δx . Zatem pasek ten przy obrocie omiata objętość równą $\pi \cdot (g^2(x) - f^2(x)) \cdot \Delta x$. Objętość całej bryły obrotowej możemy więc przybliżyć przez sumę po wszystkich paskach:

$$\pi \cdot \sum (g^2(x) - f^2(x)) \cdot \Delta x,$$

co przy nieskończeniu cienkich paskach cudownie przemienia się w całkę

$$V_{OX} = \pi \cdot \int_a^b g^2(x) - f^2(x) dx.$$

Jest to wzór na objętość bryły powstałej przez obrót obszaru wokół osi OX .

Środek ciężkości rozważanej bryły obrotowej leży oczywiście na osi OX , a jego współrzędna x -owa jest w przybliżeniu równa

$$\frac{\pi \cdot \sum \mathbf{x} \cdot (g^2(x) - f^2(x)) \cdot \Delta x}{\pi \cdot \sum (g^2(x) - f^2(x)) \cdot \Delta x},$$

co po przejściu granicznym daje dokładny wzór:

$$x_s = \frac{\int_a^b x \cdot (g^2(x) - f^2(x)) dx}{\int_a^b g^2(x) - f^2(x) dx}.$$

Z kolei obrót tegoż paska wokół osi OY prowadzi do grubej powierzchni walcowej o promieniu x , tworzącej³ $g(x) - f(x)$ oraz grubości Δx , co daje objętość

$$2\pi \cdot x \cdot (g(x) - f(x)) \cdot \Delta x.$$

To prowadzi do wzoru na objętość bryły obrotowej

$$2\pi \cdot \sum x \cdot (g(x) - f(x)) \cdot \Delta x \rightarrow 2\pi \cdot \int_a^b x \cdot (g(x) - f(x)) dx = V_{OY}.$$

Współrzędna y -kowa środka ciężkości rozważanego paska jest równa

$$\frac{g(x) + f(x)}{2},$$

co prowadzi do współrzędnej y -kowej środka ciężkości całej bryły obrotowej:

$$\frac{2\pi \cdot \sum \frac{g(x)+f(x)}{2} \cdot x \cdot (g(x) - f(x)) \cdot \Delta x}{2\pi \cdot \sum x \cdot (g(x) - f(x)) \cdot \Delta x} \rightarrow \frac{\int_a^b x \cdot (g^2(x) - f^2(x)) dx}{2 \cdot \int_a^b x \cdot (g(x) - f(x)) dx} = y_s.$$

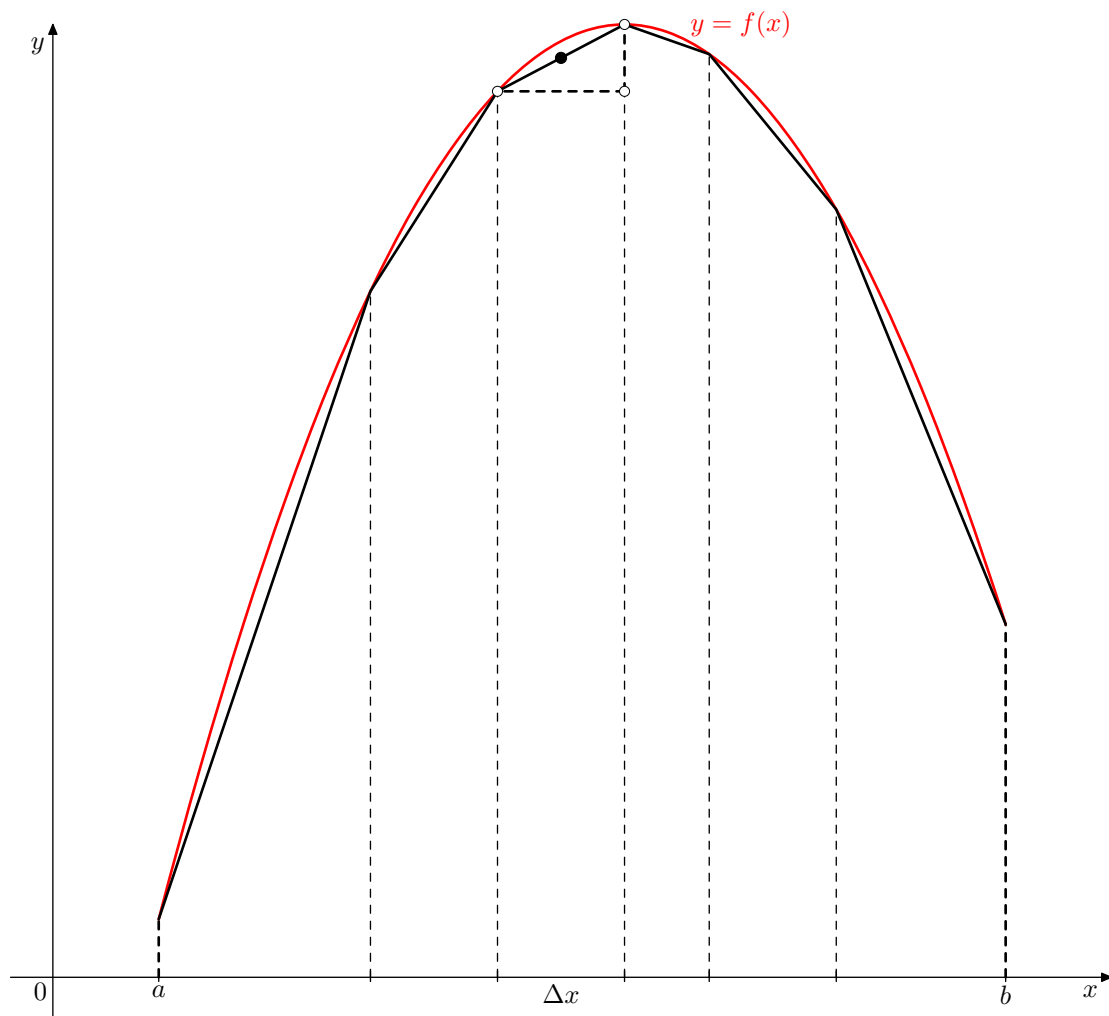
²Dla celów rachunkowych przyjmujemy, że pasek ten jest (prawie) prostokątem.

³Chodzi o długość tworzącej walca.

Powierzchnie obrotowe.

Aby móc obliczać pole powierzchni powstałej przez obrót wykresu funkcji, założymy, że funkcja ta jest gładka, czyli w tym wypadku różniczkowalna i ma ciągłą pochodną.

Trzeba sobie bowiem wyobrazić, że objętość jabłka zależy od jego rozmiaru, a nie od tego, czy jest ono świeże, czy zwiędnięte i ma pomarszczoną skórkę. Za to gładkość skórki ma decydujący wpływ na powierzchnię tejże skórki, a za gładkość odpowiada pochodna.



rys. 2

Przybliżmy wykres funkcji łamaną (rys. 2). Rozważany segment łamanej ma w przybliżeniu długość

$$\sqrt{1 + (f'(x))^2} \cdot \Delta x.$$

Przy obrocie wokół osi OX rozważany odcinek zakreśla fragment powierzchni stożkowej o tworzącej długości $\sqrt{1+(f'(x))^2} \cdot \Delta x$ i promieniu $f(x)$, a więc polu powierzchni

$$2\pi \cdot f(x) \cdot \sqrt{1+(f'(x))^2} \cdot \Delta x.$$

To prowadzi do wzoru na pole całej powierzchni obrotowej:

$$2\pi \cdot \sum f(x) \cdot \sqrt{1+(f'(x))^2} \cdot \Delta x \rightarrow 2\pi \cdot \int_a^b f(x) \cdot \sqrt{1+(f'(x))^2} dx = P_{OX}.$$

Współrzędna x -owa środka ciężkości odcinka łamanej jest równa x , skąd otrzymujemy wzór na współrzędną x -ową środka ciężkości całej powierzchni obrotowej:

$$\frac{2\pi \cdot \sum x \cdot f(x) \cdot \sqrt{1+(f'(x))^2} \cdot \Delta x}{2\pi \cdot \sum f(x) \cdot \sqrt{1+(f'(x))^2} \cdot \Delta x} \rightarrow \frac{\int_a^b x \cdot f(x) \cdot \sqrt{1+(f'(x))^2} dx}{\int_a^b f(x) \cdot \sqrt{1+(f'(x))^2} dx} = x_s.$$

Przy obrocie wokół osi OY rozważany odcinek zakreśla fragment powierzchni stożkowej o tworzącej długości $\sqrt{1+(f'(x))^2} \cdot \Delta x$ i promieniu x , a więc polu powierzchni

$$2\pi \cdot x \cdot \sqrt{1+(f'(x))^2} \cdot \Delta x.$$

To prowadzi do wzoru na pole całej powierzchni obrotowej:

$$2\pi \cdot \sum x \cdot \sqrt{1+(f'(x))^2} \cdot \Delta x \rightarrow 2\pi \cdot \int_a^b x \cdot \sqrt{1+(f'(x))^2} dx = P_{OY}.$$

Współrzędna y -kowa środka ciężkości odcinka łamanej jest równa $f(x)$, skąd otrzymujemy wzór na współrzędną y -kową środka ciężkości całej powierzchni obrotowej:

$$\frac{2\pi \cdot \sum f(x) \cdot x \cdot \sqrt{1+(f'(x))^2} \cdot \Delta x}{2\pi \cdot \sum x \cdot \sqrt{1+(f'(x))^2} \cdot \Delta x} \rightarrow \frac{\int_a^b x \cdot f(x) \cdot \sqrt{1+(f'(x))^2} dx}{\int_a^b x \cdot \sqrt{1+(f'(x))^2} dx} = y_s.$$

Obejrzyj w internecie wykład doc. Górniaka z PWr:

Odcinek 81: Obliczanie pól powierzchni brył obrotowych.