

**Dzień 12 (wtorek 31 marca 2020)****Dwa zadania bez rozwiązań<sup>1</sup>.**

**214.** Pomarańczę o cienkiej skórce pokrojono na plasterki równej grubości. Które plasterki mają więcej skórki: te bliżej równika, czy te bliżej biegunów?

**215.** Dane są dwie sfery o różnych promieniach. Dysponujemy cyrklem o stałym rozwarciu mniejszym od promienia mniejszej sfery. Na każdej ze sfer rysujemy tym cyrklem okrąg. Na której sferze narysowany okrąg ogranicza większe pole?

**Trzy zadania z podanymi rozwiązaniami.**

**216.** Wyznaczyć środek ciężkości odcinka kuli

$$\left\{ (x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1 \wedge x \geq \frac{1}{3} \right\}.$$

Interesująca współrzędna środka ciężkości jest liczbą wymierną o jednocyfrowym liczniku i mianowniku.

**Zanim zajrzysz na kolejną stronę, rozwiąż powyższe zadanie, a przynajmniej podejmij próbę rozwiązania, aby wiedzieć, gdzie napotykasz trudności.**

---

<sup>1</sup>Ale z odpowiedziami na końcu tego pliku.

*Rozwiązanie:*

Zdefiniowany w treści zadania odcinek kuli powstaje przez obrót obszaru

$$\left\{ (x, y) : \frac{1}{3} \leq x \leq 1 \wedge 0 \leq y \leq \sqrt{1-x^2} \right\}$$

wokół osi OX. Jego środek ciężkości leży więc w punkcie  $(x_s, 0, 0)$ , gdzie

$$x_s = \frac{\pi \cdot \int_{1/3}^1 x \cdot (\sqrt{1-x^2})^2 dx}{\pi \cdot \int_{1/3}^1 (\sqrt{1-x^2})^2 dx}.$$

Obliczamy:

$$\begin{aligned} \int_{1/3}^1 x \cdot (\sqrt{1-x^2})^2 dx &= \int_{1/3}^1 x - x^3 dx = \left. \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4} \right|_{x=1/3}^1 = \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{18} + \frac{1}{324} = \frac{162 - 81 - 18 + 1}{324} = \frac{64}{324} = \frac{16}{81} \end{aligned}$$

oraz

$$\int_{1/3}^1 (\sqrt{1-x^2})^2 dx = \int_{1/3}^1 1 - x^2 dx = \left. x - \frac{x^3}{3} \right|_{x=1/3}^1 = 1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{3} + \frac{1}{81} = \frac{81 - 27 - 27 + 1}{81} = \frac{28}{81},$$

skąd

$$x_s = \frac{16/81}{28/81} = \frac{4}{7}.$$

**Odpowiedź:** Środek ciężkości odcinka kuli zdefiniowanego w treści zadania leży w punkcie  $\left(\frac{4}{7}, 0, 0\right)$ .

**217.** Wyznaczyć środek ciężkości odcinka kuli

$$\left\{ (x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1 \wedge x \geq -\frac{1}{3} \right\}.$$

Interesująca współrzędna środka ciężkości jest liczbą wymierną o jednocyfrowym liczniku i mianowniku.

**Zanim zajrzysz na kolejną stronę, rozwiąż powyższe zadanie, a przynajmniej podejmij próbę rozwiązania, aby wiedzieć, gdzie napotykasz trudności.**

*Rozwiązanie:*

Zdefiniowany w treści zadania odcinek kuli powstaje przez obrót obszaru

$$\left\{ (x, y) : -\frac{1}{3} \leq x \leq 1 \wedge 0 \leq y \leq \sqrt{1-x^2} \right\}$$

wokół osi OX. Jego środek ciężkości leży więc w punkcie  $(x_s, 0, 0)$ , gdzie

$$x_s = \frac{\pi \cdot \int_{-1/3}^1 x \cdot (\sqrt{1-x^2})^2 dx}{\pi \cdot \int_{-1/3}^1 (\sqrt{1-x^2})^2 dx}.$$

Obliczamy:

$$\begin{aligned} \int_{-1/3}^1 x \cdot (\sqrt{1-x^2})^2 dx &= \int_{-1/3}^1 x - x^3 dx = \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4} \Big|_{x=-1/3}^1 = \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{18} + \frac{1}{324} = \frac{162-81-18+1}{324} = \frac{64}{324} = \frac{16}{81} \end{aligned}$$

oraz

$$\int_{-1/3}^1 (\sqrt{1-x^2})^2 dx = \int_{-1/3}^1 1-x^2 dx = x - \frac{x^3}{3} \Big|_{x=-1/3}^1 = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{81} = \frac{81-27+27-1}{81} = \frac{80}{81},$$

skąd

$$x_s = \frac{16/81}{80/81} = \frac{1}{5}.$$

**Odpowiedź:** Środek ciężkości odcinka kuli zdefiniowanego w treści zadania leży w punkcie  $\left(\frac{1}{5}, 0, 0\right)$ .

**218.** Obliczyć pole powierzchni obrotowej (torusa) powstałej przez obrót okręgu o równaniu  $(x-2)^2 + y^2 = 1$  wokół osi OY.

Pole powierzchni powstałej przez obrót krzywej  $\{(x, f(x)) : x \in [a, b]\}$ , gdzie  $0 \leq a < b$  oraz  $f \in C^1([a, b])$ , wokół osi OY jest równe

$$2\pi \cdot \int_a^b x \cdot \sqrt{1+(f'(x))^2} dx.$$

W rozwiązaniu może się też przydać wzór  $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C$ .

**Zanim zajrzysz na kolejną stronę, rozwiąż powyższe zadanie, a przynajmniej podejmij próbę rozwiązania, aby wiedzieć, gdzie napotkasz trudności.**

*Rozwiązanie:*

Przekształcanie równania obracanego okręgu prowadzi kolejno do:

$$y^2 = 1 - (x-2)^2,$$

$$y = \pm \sqrt{1 - (x-2)^2}.$$

Przy tym  $x$  może przebiegać przedział  $[1, 3]$ .

Okrąg rozdziela się więc w naturalny sposób na dwa półokręgi, o równaniach

$$y = \sqrt{1 - (x-2)^2} \quad \text{oraz} \quad y = -\sqrt{1 - (x-2)^2}.$$

Ponieważ każdy z tych półokręgów tworzy przy obrocie powierzchnię obrotową o takim samym polu, możemy wyliczyć pole powierzchni powstałej przez obrót jednego z nich, a otrzymany wynik pomnożyć przez 2.

Aby skorzystać z podanego wzoru, przyjmujemy  $[a, b] = [1, 3]$  i  $f(x) = \sqrt{1 - (x-2)^2}$ . Wówczas

$$f'(x) = \frac{-(x-2)}{\sqrt{1 - (x-2)^2}}.$$

Zatem szukane pole jest równe

$$2 \cdot 2\pi \cdot \int_1^3 x \cdot \sqrt{1 + \frac{(x-2)^2}{1 - (x-2)^2}} dx.$$

Obliczamy je wykonując podstawienie  $t = x - 2$ :

$$\begin{aligned} 2 \cdot 2\pi \cdot \int_1^3 x \cdot \sqrt{1 + \frac{(x-2)^2}{1 - (x-2)^2}} dx &= 4\pi \cdot \int_{-1}^1 (t+2) \cdot \sqrt{1 + \frac{t^2}{1-t^2}} dt = 4\pi \cdot \int_{-1}^1 (t+2) \cdot \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} dt = \\ &= 4\pi \cdot \int_{-1}^1 t \cdot \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} dt + 8\pi \cdot \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} dt. \end{aligned}$$

Ponieważ pierwsza całka w ostatniej sumie jest równa 0 jako całka z funkcji nieparzystej po przedziale symetrycznym względem zera, kontynuujemy obliczanie drugiej całki:

$$8\pi \cdot \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} dt = 8\pi \cdot \arcsin t \Big|_{t=-1}^1 = 8\pi \cdot (\arcsin 1 - \arcsin(-1)) = 8\pi \cdot \left( \frac{\pi}{2} - \frac{-\pi}{2} \right) = 8\pi^2.$$

*Odpowiedź:* Pole torusa jest równe  $8\pi^2$ .

*Uwaga:* Nieprzypadkowo pole torusa jest iloczynem długości obracanego okręgu przez drogę określaną przy obrocie przez środek (czyli środek ciężkości) tego okręgu (twierdzenie Pappusa-Guldina).

**214.** Wszystkie plastry zawierają tyle samo skórki.

**215.** Pole ograniczone okręgiem nie zależy od promienia sfery, a jedynie od rozwarcia cyrkla użytego do narysowania okręgu. Takie samo jest pole koła narysowanego na płaszczyźnie. Pole całej sfery jest równe polu koła o promieniu równym średnicy sfery – na sferze rysujemy to tak: nóżka cyrkla w jednym biegunie, ołówek ślizga się po drugim biegunie. Natomiast półsfera powstaje przez umieszczenie nóżki na biegunie i narysowanie równika – zastanów się jaki jest wówczas rozstaw cyrkla i sprawdź, że pole się zgadza.