

Dzień 13 (środa 1 kwietnia 2020)

No i jak tu nie być przesądnym. Trzynasty dzień wykładu z Koronalizy wypada w Prima Aprilis.

Dziesięć zadań na rozgrzewkę (nie tylko z analizy).

219. Uprość ułamki

$$\frac{19}{95} \qquad \frac{26}{65} \qquad \frac{16}{64} \qquad \frac{49}{98}$$

220. Oblicz $4!$ nie wykonując żadnego mnożenia.

221. Uprość logarytm $\log_{25} 121$.

222. Oblicz $2^5 \cdot 9^2$ oraz $3^4 \cdot 425$.

223. Uprość wyrażenie

$$\frac{2\sqrt{2}-3}{\sqrt{2}-1} + \frac{11-6\sqrt{2}}{3-\sqrt{2}}$$

224. Uprość pierwiastek $\sqrt[6]{64}$.

225. Wykonaj działania na ułamkach

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{15} + \frac{1}{24} - \frac{1}{3} \qquad \frac{1}{8} + \frac{1}{18} + \frac{1}{24} - \frac{1}{5} \qquad \frac{1}{7} + \frac{1}{24} + \frac{1}{30} - \frac{1}{5}$$

226. Oblicz wartość wyrażenia

$$\binom{2k}{k} \cdot \sqrt{\frac{\sin x}{n}}$$

dla $k=2$, $n=3$, $x=30^\circ$.

227. Policz całki oznaczone:

$$\int_0^1 x \, dx \qquad \int_e^{e^2} \ln x \, dx \qquad \int_1^2 e^{x^2} \, dx \qquad \int_1^e \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \, dx \qquad \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{7}} \sqrt[17]{x^{73} + 2016x^{37} + 257} \, dx$$

228. Udowodnij, że liczba $\sqrt{2}$ jest wymierna. Najlepiej na kilka sposobów.

219. Uprość ułamki

$$\frac{19}{95} \qquad \frac{26}{65} \qquad \frac{16}{64} \qquad \frac{49}{98}$$

Rozwiązanie:

$$\frac{19}{95} = \frac{1\cancel{9}}{\cancel{9}5} = \frac{1}{5} \qquad \frac{26}{65} = \frac{2\cancel{6}}{\cancel{6}5} = \frac{2}{5} \qquad \frac{16}{64} = \frac{1\cancel{6}}{\cancel{6}4} = \frac{1}{4} \qquad \frac{49}{98} = \frac{4\cancel{9}}{\cancel{9}8} = \frac{4}{8}$$

220. Oblicz $4!$ nie wykonując żadnego mnożenia.*Rozwiązanie:*

$$4! = \left(\frac{1000}{250}\right)! = \text{Tysiąc dwieście pięćdziesiątych!} = \frac{1200}{50} = 24$$

221. Uprość logarytm $\log_{25} 121$.*Rozwiązanie:*

$$\log_{25} 121 = \log_{2\cancel{5}} 1\cancel{2}1 = \log_5 11$$

222. Oblicz $2^5 \cdot 9^2$ oraz $3^4 \cdot 425$.*Rozwiązanie:*

$$2^5 \cdot 9^2 = 2^5 9^2 = 2^5 9^2 = 2^5 9^2 = 2^5 9^2 = 2^5 9^2 = 2592$$

$$3^4 \cdot 425 = 3^4 425 = 3^4 425 = 3^4 425 = 3^4 425 = 3^4 425 = 34425$$

223. Uprość wyrażenie

$$\frac{2\sqrt{2}-3}{\sqrt{2}-1} + \frac{11-6\sqrt{2}}{3-\sqrt{2}}$$

Rozwiązanie:

$$\frac{2\sqrt{2}-3}{\sqrt{2}-1} + \frac{11-6\sqrt{2}}{3-\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}-3}{\sqrt{2}-1} + \frac{11-6\sqrt{2}}{3-\sqrt{2}} = \frac{8-4\sqrt{2}}{2} = 4-2\sqrt{2}$$

224. Uprość pierwiastek $\sqrt[6]{64}$.*Rozwiązanie:*

$$\sqrt[6]{64} = \sqrt[6]{\cancel{6}4} = \sqrt{4}$$

225. Wykonaj działania na ułamkach

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{15} + \frac{1}{24} - \frac{1}{3}$$

$$\frac{1}{8} + \frac{1}{18} + \frac{1}{24} - \frac{1}{5}$$

$$\frac{1}{7} + \frac{1}{24} + \frac{1}{30} - \frac{1}{5}$$

Rozwiązanie:

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{15} + \frac{1}{24} - \frac{1}{3} = \frac{1}{4+15+24-3} = \frac{1}{40}$$

$$\frac{1}{8} + \frac{1}{18} + \frac{1}{24} - \frac{1}{5} = \frac{1}{8+18+24-5} = \frac{1}{45}$$

$$\frac{1}{7} + \frac{1}{24} + \frac{1}{30} - \frac{1}{5} = \frac{1}{7+24+30-5} = \frac{1}{56}$$

226. Oblicz wartość wyrażenia

$$\binom{2k}{k} \cdot \sqrt{\frac{\sin x}{n}}$$

dla $k=2$, $n=3$, $x=30^\circ$.

Rozwiązanie:

$$\binom{2k}{k} \cdot \sqrt{\frac{\sin x}{n}} = \frac{2k!}{k! \cdot k!} \cdot \sqrt{\frac{\sin x}{n}} = \frac{2k!}{k! \cdot k!} \cdot \sqrt{\frac{\sin x}{n}} = \frac{2}{k!} \cdot \sqrt{\sin x} = \frac{2}{2!} \cdot \sqrt{6} = \frac{2}{2} \cdot \sqrt{6} = \sqrt{6}.$$

Odpowiedź:

Wartość wyrażenia $\binom{2k}{k} \cdot \sqrt{\frac{\sin x}{n}}$ dla $k=2$, $n=3$, $x=30^\circ$ jest równa $\sqrt{6}$.

227. Policz całki oznaczone:

$$\int_0^1 x dx \quad \int_e^{e^2} \ln x dx \quad \int_1^2 e^{x^2} dx \quad \int_1^e \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x dx \quad \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{7}} \sqrt[17]{x^{73} + 2016x^{37} + 257} dx$$

Rozwiązanie:

Jest pięć całek. Przecież nikt nie kazał obliczać ich wartości.

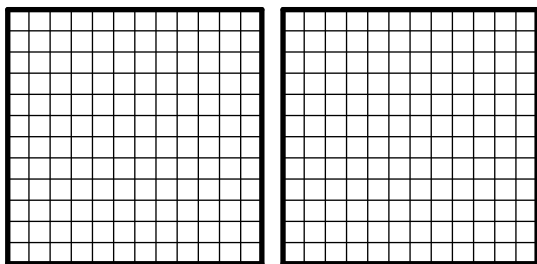
Uwaga: Zadanie polega na odgadnięciu niejasnej treści w sposób zgodny z intencją autora. Dawanie takich zadań powinno być **surowo zakazane przez 365 dni w roku**¹.

¹Proponowany czas zakazu dotyczy roku przestępnego i obejmuje okresy od 1 stycznia do 31 marca i od 2 kwietnia do 31 grudnia.

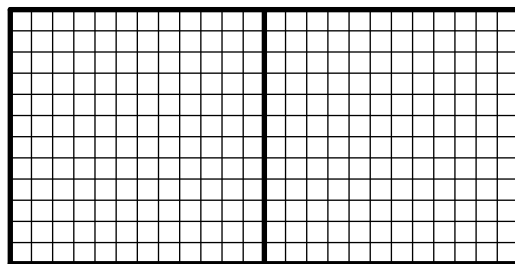
228. Udowodnij, że liczba $\sqrt{2}$ jest wymierna. Najlepiej na kilka sposobów.

Rozwiązanie:

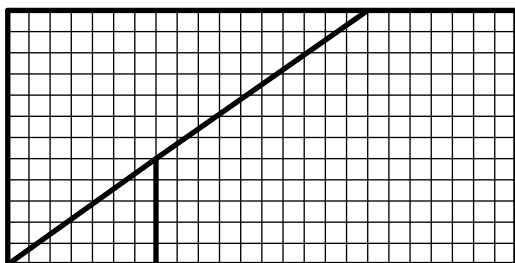
Podwojenie kwadratu po raz pierwszy, czyli graficzny dowód wymierności liczby $\sqrt{2}$.



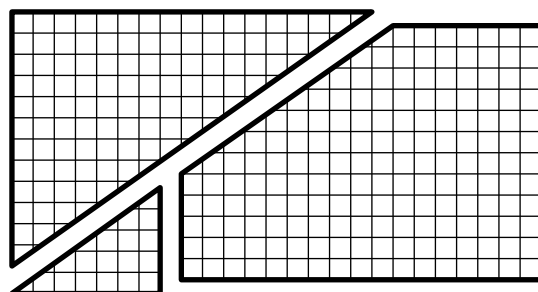
rys. 1



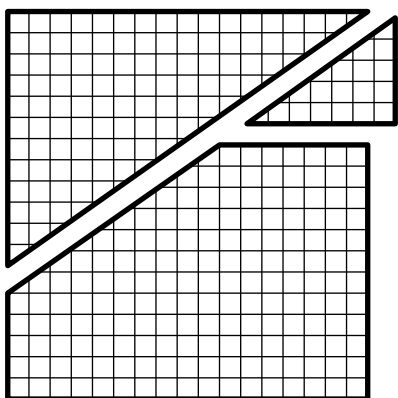
rys. 2



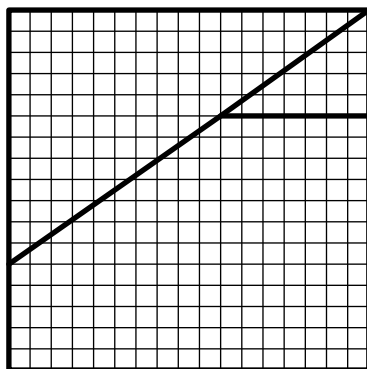
rys. 3



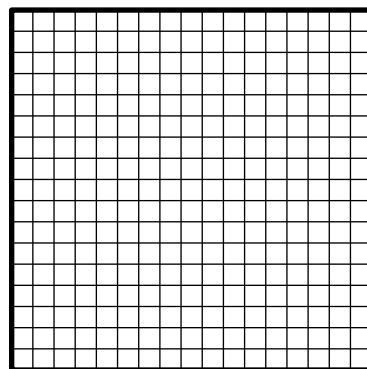
rys. 4



rys. 5

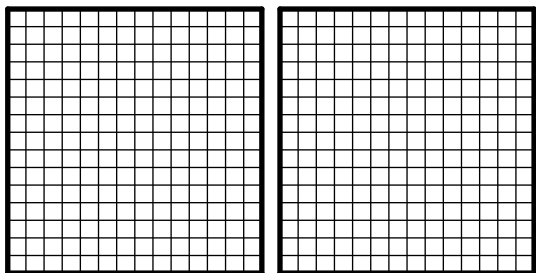


rys. 6

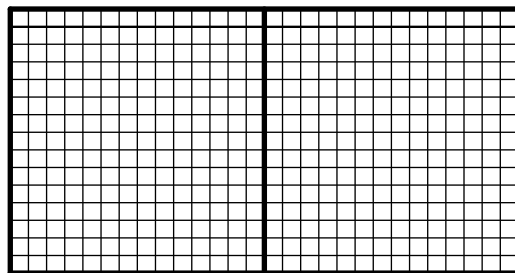


rys. 7

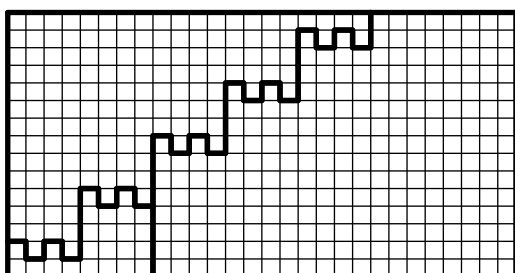
Podwojenie kwadratu po raz drugi, czyli graficzny dowód wymierności liczby $\sqrt{2}$.



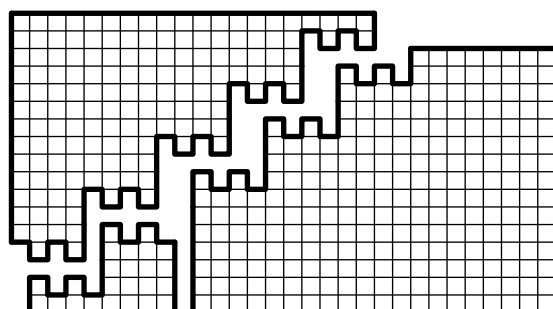
rys. 8



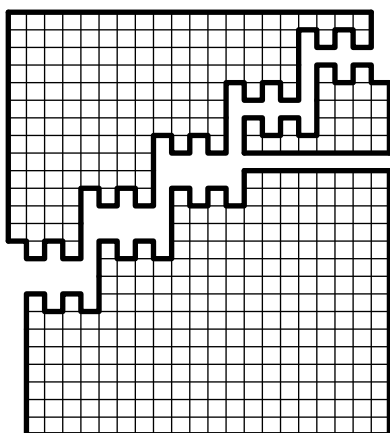
rys. 9



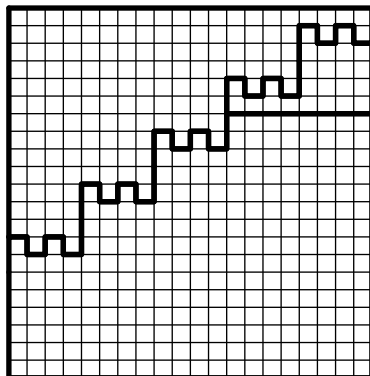
rys. 10



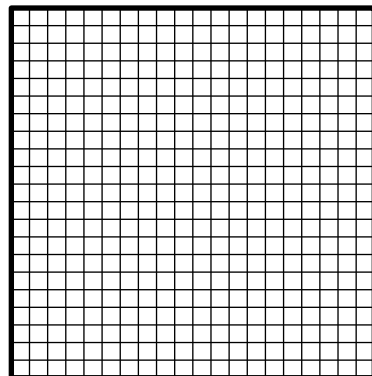
rys. 11



rys. 12

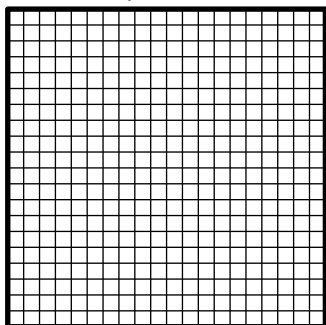


rys. 13

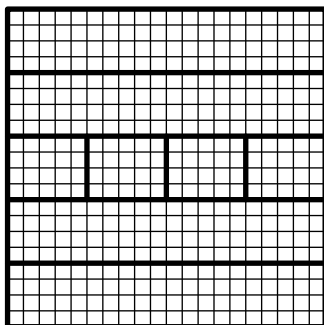


rys. 14

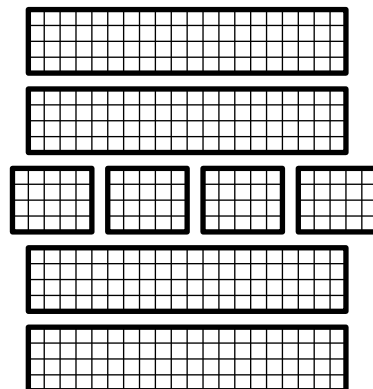
Podwojenie kwadratu po raz trzeci, czyli graficzny dowód wymierności liczby $\sqrt{2}$.



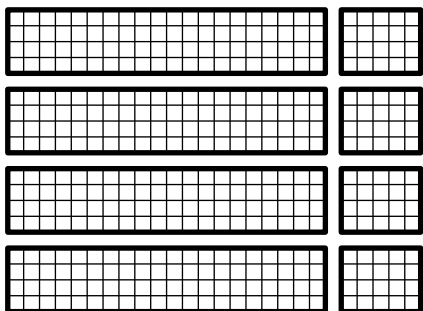
rys. 15



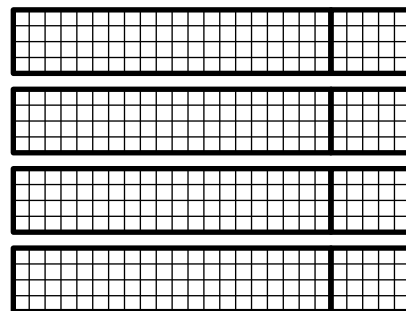
rys. 16



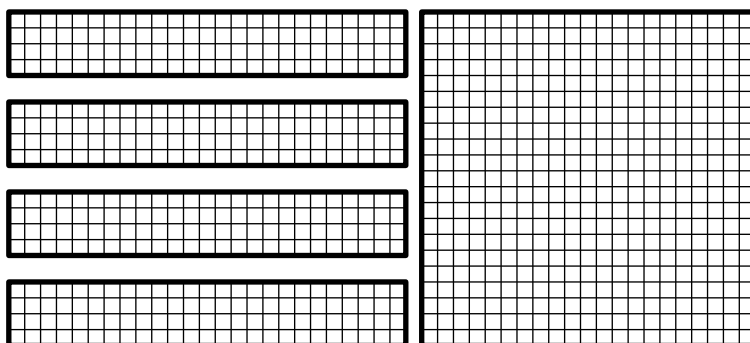
rys. 17



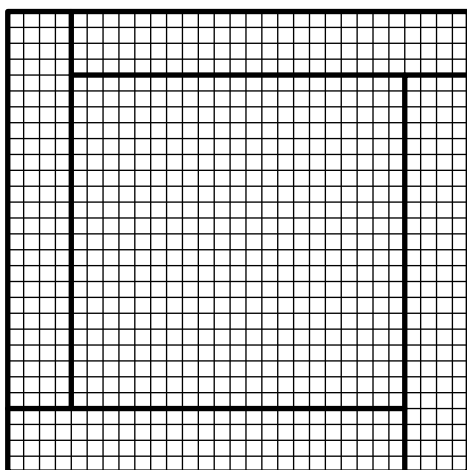
rys. 18



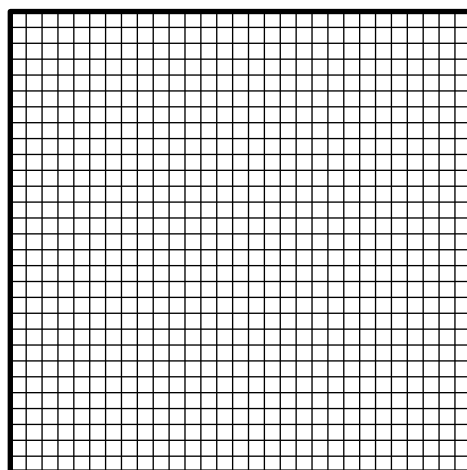
rys. 19



rys. 20



rys. 21



rys. 22

A teraz na poważnie...

No dobra, trochę sobie pożartowaliśmy dla odprężenia, czas przejść do właściwego wykładu i zająć się czymś poważnym.

Hmmm... To może tak: Ile jest równe pole kwadratu o boku 1? Chyba to nie jest wystarczająco poważne. To może to pole kwadratu obliczmy przy użyciu całki. Powiedzmy z funkcji stałej równej 1 na przedziale $[0, 1]$, czyli

$$\int_0^1 1 \, dx.$$

Nadal mało poważne? No to może wykonajmy jakieś podstawienie, na przykład $x = \sqrt{t}$, co da formalny wzór $dx = \frac{dt}{2\sqrt{t}}$. Otrzymujemy całkę²

$$\int_0^1 \frac{dt}{2\sqrt{t}} = \sqrt{t} \Big|_{t=0}^1 = \sqrt{1} - \sqrt{0} = 1.$$

Wyszło, że pole kwadratu jest równe 1. Uffff... Zgadza się. Jest dobrze.

To wobec tego dwa pytania:

1° Skoro to jest dobrze, to dlaczego to jest źle?

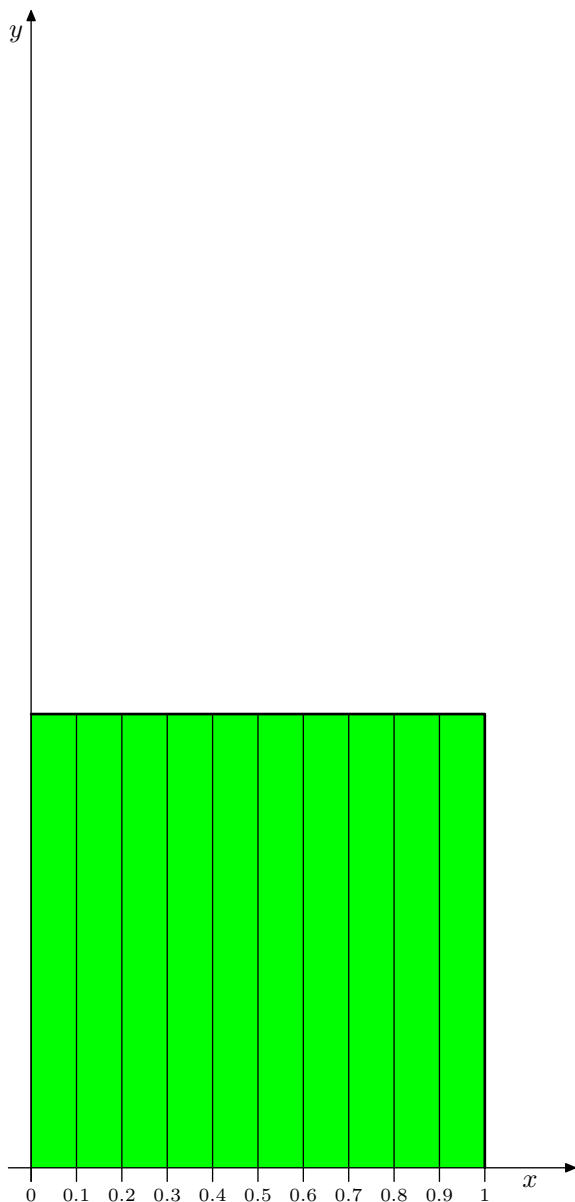
2° Skoro to jest źle, to dlaczego jednak jest dobrze?

Bardzo fajnie się bezmyślnie liczyło całkę $\int_0^1 \frac{dt}{2\sqrt{t}}$, ale zgodnie z naszymi dotychczasowymi umowami, ta całka nie ma sensu. Umówiliśmy się bowiem, że całkujemy tylko funkcje ograniczone, gdyż tylko takie funkcje prowadzą do figur ograniczonych.

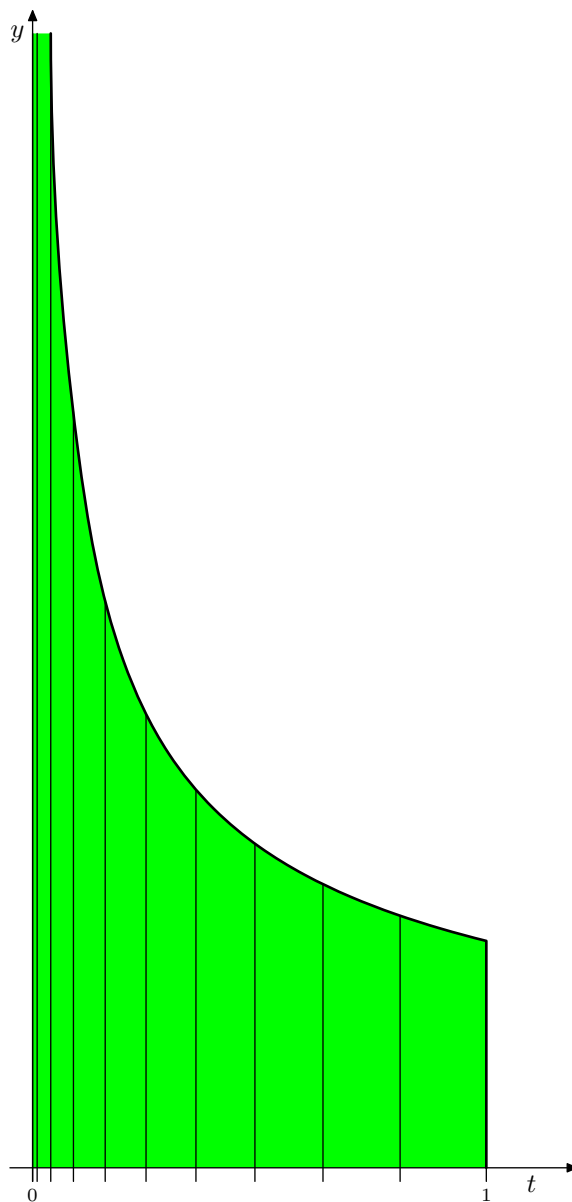
²Pamiętałem o zmianie granic całkowania. Naprawdę !!!

Tymczasem podstawienie, które wykonaliśmy, dosyć mocno zdeformowało kwadratowy obszar pod wykresem funkcji (rys. 23). Z prawej strony kwadrat był rozciągany w poziomie, więc dla zachowania pola zapadł się w pionie – przy prawym brzegu prawie dwukrotnie. Z kolei blisko lewego brzegu deformacja w poziomie powodowała niemiłosiernie ściskanie obszaru, przez co dla zachowania pola wypiętrzył się on do nieskończoności (rys. 24). W zasadzie wydaje się, że przy tej deformacji pole powinno się zachować³, ale czym jest pole nieograniczonej figury, takiej jak na rysunku 24?

Przy definicji pola umieszczaliśmy figury w wielokątach, a figury nieograniczonej nie da się w umieścić wielokącie⁴.



rys. 23



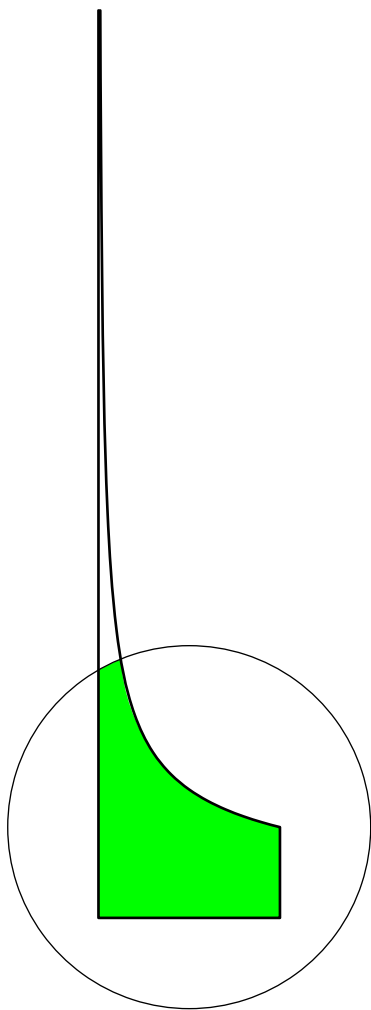
rys. 24

³Pionowe kreski powinny ułatwić prześledzenie jak jest deformowany kwadrat.

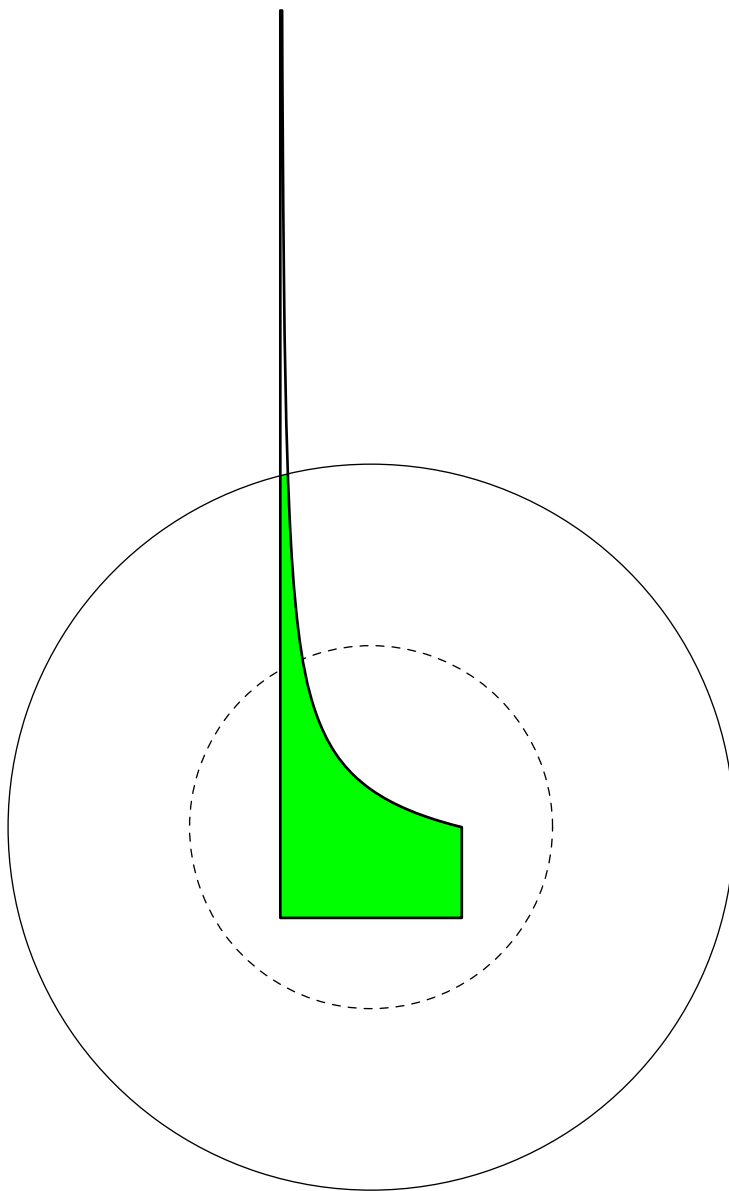
⁴Kto by pomyślał, że prościutkie podstawienie w prościutkiej całce doprowadzi do takich kłopotów...

Otóż pole figury nieograniczonej definiuje się następująco:
 Obcinamy figurę do coraz większych kół⁵ (rys. 25 i 26). Jeżeli te przekroje mają pola⁶,
 to jest sens mówić o polu figury i jest ono granicą⁷ pól przekrojów figury z kołami
 o ustalonym środku i promieniu dążącym do nieskończoności.

Jest w sumie obojętne, czy będziemy rozważać przecięcia figury z kołami, czy z siedem-
 nastokątami foremnymi, czy też będziemy ją okrawać w inny sposób, byle odpowiedni⁸.



rys. 25



rys. 26

⁵A dokładniej: rozważamy przekroje figury z tymi kołami.

⁶Czyli są mierzalne.

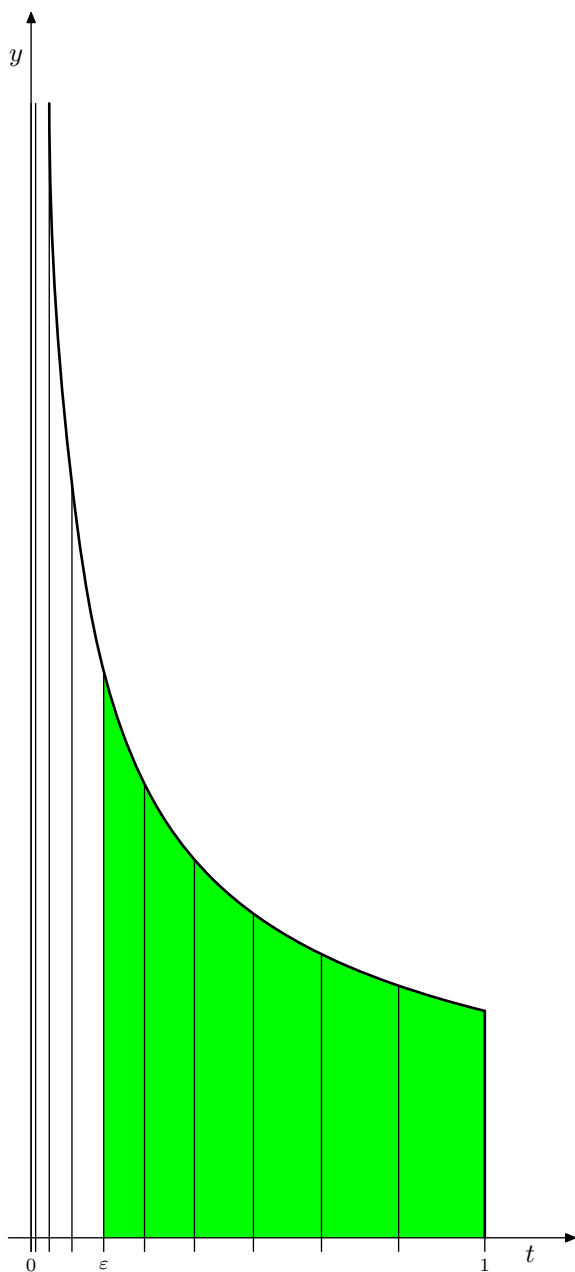
⁷Może to być granica niewłaściwa $+\infty$. Wówczas powiemy, że figura ma nieskończone pole.

⁸Nie będę precyzował, co słowo "odpowiedni" tu znaczy.

Pozbądźmy się wypiętrzenia obszaru koło zera poprzez odcięcie wąziutkiego pionowego paska⁹ przy lewym brzegu (rys. 27 i 28). Jeśli pasek ten ma szerokość ε , to pole okrojonego obszaru jest równe

$$\int_{\varepsilon}^1 \frac{dt}{2\sqrt{t}} = \sqrt{t} \Big|_{t=\varepsilon}^1 = 1 - \sqrt{\varepsilon},$$

co dąży do 1 przy $\varepsilon \rightarrow 0$.



rys. 27



rys. 28

⁹Może wyglądać dziwnie, że akurat tak okrawamy obszar, ale zależy nam na tym, aby pole okrojonego obszaru dało się liczyć przy pomocy całki.

To był wstęp do pojęcia całki niewłaściwej. Czym właściwie jest całka niewłaściwa, opowiem Wam jutro.

A z dzisiejszego wykładu powinniście wynieść tyle:

Można myśleć o całce

$$\int_a^b f(x) dx,$$

gdzie $f : (a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ jest ciągła¹⁰. Funkcja f może mieć w pobliżu a jakąś osobliwość, na przykład może dążyć do nieskończoności albo szaleńczo oscylować. Na pewno istnieją całki

$$\int_{a+\varepsilon}^b f(x) dx,$$

gdzie ε jest dodatnie i nie za duże¹¹. Wówczas definiujemy

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{a+\varepsilon}^b f(x) dx.$$

Oczywiście, jak to z granicą bywa, może istnieć albo nie.

- Jeśli ta granica istnieje i jest liczbą skończoną, to powiemy, że całka niewłaściwa $\int_a^b f(x) dx$ jest zbieżna i przypiszemy jej otrzymaną wartość liczbową.
- Jeśli ta granica istnieje jako granica niewłaściwa $+\infty$ albo $-\infty$, to powiemy, że całka niewłaściwa $\int_a^b f(x) dx$ jest **rozbieżna** i przypiszemy jej otrzymaną wartość $\pm\infty$.
- Jeśli ta granica nie istnieje nawet jako granica niewłaściwa, to powiemy, że całka niewłaściwa $\int_a^b f(x) dx$ jest **rozbieżna** i nie przypiszemy jej żadnej wartości.

Nie trzeba się bawić ze zmianą granicy całkowania. Rozważaną przez nas całkę niewłaściwą można obliczać tak:

$$\int_0^1 \frac{dt}{2\sqrt{t}} = \sqrt{t} \Big|_{t=0}^1 = \sqrt{1} - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \sqrt{\varepsilon} = 1 - 0 = 1.$$

Pamiętajmy, że całka ma osobliwość w dolnej granicy całkowania. Licząc przyrost funkcji pierwotnej, możemy napisać w dolnej granicy $t=0$, ale w kontekście osobliwości funkcji podcałkowej nie oznacza to podstawienia $t=0$ do funkcji pierwotnej, ale wzięcie prawostronnej granicy funkcji pierwotnej w zerze.

¹⁰Uwaga: przedział otwarty z lewej strony.

¹¹Bo nie chcemy, aby $a+\varepsilon > b$.