

Dzień 14 (czwartek 2 kwietnia 2020)**Całki niewłaściwe**

Po wczorajszym wstępie czas na nieco dokładniejsze wyjaśnienie czym są całki niewłaściwe i jak się je oblicza. Na razie zajmiemy się przypadkiem, gdy funkcja podcałkowa jest ciągła wewnątrz przedziału całkowania.

Dziś nie będziemy się jeszcze zajmować badaniem zbieżności całek niewłaściwych w oparciu o inne kryteria niż bezpośrednie usiłowanie wyliczenia wartości.

Całką niewłaściwą jest całka

$$\int_a^b f(x) dx,$$

gdzie funkcja f jest ciągła na przedziale (a, b) , ale sama całka w co najmniej jednym końcu przedziału całkowania ma osobliwość. Osobliwość całki może być osobliwością funkcji f , ale może też być związana z przedziałem całkowania, gdyż dopuszczamy $a = -\infty$ oraz $b = +\infty$.

Jeśli F jest funkcją pierwotną funkcji f , to¹

$$\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_{x=a}^b = \lim_{x \rightarrow b^-} F(x) - \lim_{x \rightarrow a^+} F(x).$$

Przy tym całka jest rozbieżna, jeśli co najmniej jedna z powyższych granic nie istnieje².

Przykład:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \frac{dx}{x^2+1} = \arctg x \Big|_{-\infty}^{\infty} = \lim_{x \rightarrow \infty} \arctg x - \lim_{x \rightarrow -\infty} \arctg x = \frac{\pi}{2} - \frac{-\pi}{2} = \pi.$$

A teraz poćwicz obliczanie całek niewłaściwych. Większość zadań jest podobnego typu. Jeśli przy którymś z rzędu zadaniom uznasz, że już wiesz, jak się rozwiązuje takie zadania i gdzie można popełnić błąd i jak tego błędu uniknąć, nie musisz rozwiązywać wszystkich – wystarczy, że zerkniesz na rozwiązania pozostałych zadań.

229. Obliczyć wartość całki niewłaściwej $\int_0^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt{x^3}}$ lub wykazać, że całka ta jest rozbieżna.

Zanim zajrzysz na kolejną stronę, rozwiąż powyższe zadanie, a przynajmniej podejmij próbę rozwiązania, aby wiedzieć, gdzie napotykasz trudności.

¹W przypadku, gdy $a = -\infty$ lub $b = +\infty$ nie piszemy znaków granic jednostronnych. A ponadto w przypadku $a = -\infty$ możemy dolną granicę przyrostu zapisać jako $-\infty$, jeśli razi nas $x = -\infty$.

²To znaczy, że nie jest liczbą skończoną.

Rozwiązanie:

Wykonujemy podstawienie $t = \sqrt{x}$, czyli $x = t^2$ przy założeniu $t \geq 0$, skąd dostajemy formalny wzór $dx = 2t dt$. Przy tym podstawieniu przedziałowi całkowania $x \in (0, \infty)$ odpowiada przedział $t \in (0, \infty)$.

Otrzymujemy:

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt{x^3}} &= \int_0^\infty \frac{2t dt}{t + t^3} = 2 \cdot \int_0^\infty \frac{dt}{1 + t^2} = 2 \cdot \operatorname{arctg} t \Big|_{t=0}^\infty = \\ &= 2 \cdot \left(\lim_{t \rightarrow \infty} \operatorname{arctg} t \right) - 2 \cdot \operatorname{arctg} 0 = 2 \cdot \frac{\pi}{2} - 0 = \pi. \end{aligned}$$

Odpowiedź: Podana całka niewłaściwa jest zbieżna i ma wartość π .

230. Obliczyć wartość całki niewłaściwej $\int_3^\infty \frac{dx}{x^2 - 1}$ lub wykazać, że całka ta jest rozbieżna.

Zanim zajrzysz na kolejną stronę, rozwiąż powyższe zadanie, a przynajmniej podejmij próbę rozwiązania, aby wiedzieć, gdzie napotykasz trudności.

Rozwiązanie:

Rozkładamy funkcję podcałkową na sumę ułamków prostych:

$$\frac{1}{x^2-1} = \frac{1}{(x-1) \cdot (x+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1},$$

$$1 = A \cdot (x+1) + B \cdot (x-1),$$

$$1 = Ax + A + Bx - B,$$

$$\begin{cases} 0 &= A+B \\ 1 &= A-B \end{cases}$$

Bez trudu otrzymujemy $A = 1/2$ i $B = -1/2$.

Wobec tego

$$\begin{aligned} \int_3^\infty \frac{dx}{x^2-1} &= \int_3^\infty \frac{1/2}{x-1} - \frac{1/2}{x+1} dx = \frac{1}{2} \cdot \int_3^\infty \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} dx = \frac{\ln|x-1|}{2} - \frac{\ln|x+1|}{2} \Big|_{x=3}^\infty = \\ &= \left(\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{\ln|x-1|}{2} - \frac{\ln|x+1|}{2} \right) \right) - \frac{\ln 2}{2} + \frac{\ln 4}{2} = \left(\frac{1}{2} \cdot \lim_{x \rightarrow \infty} \ln \frac{x-1}{x+1} \right) + \frac{-\ln 2 + 2 \cdot \ln 2}{2} = \\ &= \left(\frac{1}{2} \cdot \ln \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x-1}{x+1} \right) + \frac{\ln 2}{2} = \frac{1}{2} \cdot \ln 1 + \frac{\ln 2}{2} = \frac{\ln 2}{2}. \end{aligned}$$

Odpowiedź: Podana całka niewłaściwa jest zbieżna i ma wartość $\frac{\ln 2}{2}$.

Uwaga: Całki

$$\int_3^\infty \frac{1}{x-1} dx, \quad \int_3^\infty \frac{1}{x+1} dx$$

są rozbieżne, a granice

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln|x-1|}{2}, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln|x+1|}{2}$$

są nieskończone, nie mogą się więc pojawić w rozwiązaniu w konfiguracji prowadzącej do nieoznaczoności $\infty - \infty$.

Odpowiednie poradzenie sobie z przejściem granicznym jest kluczową częścią zadania. Bez tego elementu, nawet przy poprawnym wyniku liczbowym, zadanie nie może zostać uznane za rozwiązane.

231. Obliczyć wartość całki niewłaściwej $\int_2^\infty \frac{x}{x^4-1} dx$ lub wykazać, że całka ta jest rozbieżna.

Zanim zajrzysz na kolejną stronę, rozwiąż powyższe zadanie, a przynajmniej podejmij próbę rozwiązania, aby wiedzieć, gdzie napotykasz trudności.

Rozwiązanie:

Rozkładamy funkcję podcałkową na sumę ułamków prostych:

$$\frac{x}{x^4-1} = \frac{x}{(x-1) \cdot (x+1) \cdot (x^2+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{Cx+D}{x^2+1},$$

$$x = A \cdot (x+1) \cdot (x^2+1) + B \cdot (x-1) \cdot (x^2+1) + (Cx+D) \cdot (x^2-1),$$

$$x = Ax^3 + Ax^2 + Ax + A + Bx^3 - Bx^2 + Bx - B + Cx^3 - Cx + Dx^2 - D,$$

$$\begin{cases} 0 &= A+B+C \\ 0 &= A-B+D \\ 1 &= A+B-C \\ 0 &= A-B-D \end{cases}$$

Konfrontacja równań drugiego i czwartego daje $D=0$, natomiast odjęcie stronami równań pierwszego i trzeciego prowadzi do $C=-1/2$. Uwzględnienie tych wartości pozostawia równania

$$\begin{cases} 1/2 &= A+B \\ 0 &= A-B \end{cases}$$

Stąd łatwo otrzymujemy $A=B=1/4$.

Wobec tego

$$\begin{aligned} \int_2^\infty \frac{x}{x^4-1} dx &= \int_2^\infty \frac{1/4}{x-1} + \frac{1/4}{x+1} - \frac{x/2}{x^2+1} dx = \frac{1}{4} \cdot \int_2^\infty \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1} - \frac{2x}{x^2+1} dx = \\ &= \frac{\ln|x-1|}{4} + \frac{\ln|x+1|}{4} - \frac{\ln(x^2+1)}{4} \Big|_{x=2}^\infty = \\ &= \left(\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{\ln|x-1|}{4} + \frac{\ln|x+1|}{4} - \frac{\ln(x^2+1)}{4} \right) \right) - \frac{\ln 1}{4} - \frac{\ln 3}{4} + \frac{\ln 5}{4} = \\ &= \left(\frac{1}{4} \cdot \lim_{x \rightarrow \infty} \ln \frac{(x-1) \cdot (x+1)}{x^2+1} \right) + \frac{\ln 5 - \ln 3}{4} = \\ &= \left(\frac{1}{4} \cdot \ln \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x-1) \cdot (x+1)}{x^2+1} \right) + \frac{\ln 5 - \ln 3}{4} = \frac{1}{4} \cdot \ln 1 + \frac{\ln 5 - \ln 3}{4} = \frac{\ln 5 - \ln 3}{4}. \end{aligned}$$

Odpowiedź: Podana całka niewłaściwa jest zbieżna i ma wartość $\frac{\ln 5 - \ln 3}{4}$.

Uwaga: Całki

$$\int_2^\infty \frac{1}{x-1} dx, \quad \int_2^\infty \frac{1}{x+1} dx, \quad \int_2^\infty \frac{2x}{x^2+1} dx$$

są rozbieżne, a granice

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln|x-1|}{4}, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln|x+1|}{4}, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(x^2+1)}{4}$$

są nieskończone, nie mogą się więc pojawić w rozwiązaniu w konfiguracji prowadzącej do nieoznaczoności $\infty - \infty$.

Odpowiednie poradzenie sobie z przejściem granicznym jest kluczową częścią zadania. Bez tego elementu, nawet przy poprawnym wyniku liczbowym, zadanie nie może zostać uznane za rozwiązane.

Uwaga 2: Prostsze rachunki otrzymamy wykonując podstawienie $t = x^2$.

232. Obliczyć wartość całki niewłaściwej $\int_4^{\infty} \frac{5x-2}{x^3+x^2-2x} dx$ i po uproszczeniu wyniku określić, czy wartość ta jest większa czy mniejsza od 1.

Zanim zajrzysz na kolejną stronę, rozwiąż powyższe zadanie, a przynajmniej podejmij próbę rozwiązania, aby wiedzieć, gdzie napotykasz trudności.

Rozwiązanie:

Zauważamy, że liczby 0 i 1 są miejscami zerowymi wielomianu sześciennego występującego w mianowniku funkcji podcałkowej, skąd otrzymujemy

$$x^3 + x^2 - 2x = x \cdot (x-1) \cdot (x+2).$$

Rozkładamy funkcję podcałkową na sumę ułamków prostych:

$$\frac{5x-2}{x \cdot (x-1) \cdot (x+2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x+2},$$

$$5x-2 = A \cdot (x-1) \cdot (x+2) + B \cdot x \cdot (x+2) + C \cdot x \cdot (x-1).$$

W tym momencie można wymnożyć wyrażenia po prawej stronie, ułożyć układ trzech równań liniowych z trzema niewiadomymi A , B i C , porównując współczynniki przy jednakowych potęgach x 'a, a następnie rozwiązać ten układ równań.

My jednak podstawimy za x wartości 0, 1 i -2 otrzymując odpowiednio

$$\text{dla } x=0 \quad -2 = -2A, \quad \text{skąd} \quad A=1,$$

$$\text{dla } x=1 \quad 3 = 3B, \quad \text{skąd} \quad B=1,$$

$$\text{dla } x=-2 \quad -12 = 6C, \quad \text{skąd} \quad C=-2.$$

Wobec tego

$$\int_4^{\infty} \frac{5x-2}{x^3+x^2-2x} dx = \int_4^{\infty} \frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} - \frac{2}{x+2} dx = \ln|x| + \ln|x-1| - 2 \cdot \ln|x+2| \Big|_{x=4}^{\infty} =$$

$$= \left(\lim_{x \rightarrow \infty} (\ln|x| + \ln|x-1| - 2 \cdot \ln|x+2|) \right) - \ln 4 - \ln 3 + 2 \cdot \ln 6 = \left(\lim_{x \rightarrow \infty} \ln \frac{x \cdot (x-1)}{(x+2)^2} \right) + \ln 3 =$$

$$= \ln \left(\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x \cdot (x-1)}{(x+2)^2} \right) + \ln 3 = \ln \left(\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{1}{x}}{\left(1 + \frac{2}{x}\right)^2} \right) + \ln 3 = \ln 1 + \ln 3 = \ln 3 > \ln e = 1.$$

Odpowiedź: Podana całka niewłaściwa ma wartość $\ln 3 > 1$.

Uwaga: Całki

$$\int_4^{\infty} \frac{1}{x} dx, \quad \int_4^{\infty} \frac{1}{x-1} dx, \quad \int_4^{\infty} \frac{1}{x+2} dx$$

są rozbieżne, a granice

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \ln|x|, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \ln|x-1|, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \ln|x+2|$$

są nieskończone, nie mogą się więc pojawić w rozwiązaniu w konfiguracji prowadzącej do nieoznaczoności $\infty - \infty$.

233. Obliczyć wartość całki niewłaściwej $\int_2^{\infty} \frac{x-5}{x^3-x} dx$ i po uproszczeniu wyniku określić, czy wartość ta jest większa czy mniejsza od 0.

Zanim zajrzysz na kolejną stronę, rozwiąż powyższe zadanie, a przynajmniej podejmij próbę rozwiązania, aby wiedzieć, gdzie napotykasz trudności.

Rozwiązanie:

Zauważamy, że

$$x^3 - x = (x-1) \cdot x \cdot (x+1).$$

Rozkładamy funkcję podcałkową na sumę ułamków prostych:

$$\frac{x-5}{(x-1) \cdot x \cdot (x+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x} + \frac{C}{x+1},$$

$$x-5 = A \cdot x \cdot (x+1) + B \cdot (x-1) \cdot (x+1) + C \cdot (x-1) \cdot x.$$

W tym momencie można wymnożyć wyrażenia po prawej stronie, ułożyć układ trzech równań liniowych z trzema niewiadomymi A , B i C , porównując współczynniki przy jednakowych potęgach x 'a, a następnie rozwiązać ten układ równań.

My jednak podstawimy za x wartości 0, 1 i -1 otrzymując odpowiednio

$$\text{dla } x=1 \quad -4=2A, \quad \text{skąd} \quad A=-2,$$

$$\text{dla } x=0 \quad -5=-B, \quad \text{skąd} \quad B=5,$$

$$\text{dla } x=-1 \quad -6=2C, \quad \text{skąd} \quad C=-3.$$

Wobec tego

$$\begin{aligned} \int_2^\infty \frac{x-5}{x^3-x} dx &= \int_2^\infty -\frac{2}{x-1} + \frac{5}{x} - \frac{3}{x+1} dx = -2 \cdot \ln|x-1| + 5 \cdot \ln|x| - 3 \cdot \ln|x+1| \Big|_{x=2}^\infty = \\ &= \left(\lim_{x \rightarrow \infty} (-2 \cdot \ln|x-1| + 5 \cdot \ln|x| - 3 \cdot \ln|x+1|) \right) + 2 \cdot \ln 1 - 5 \cdot \ln 2 + 3 \cdot \ln 3 = \\ &= \left(\lim_{x \rightarrow \infty} \ln \frac{x^5}{(x-1)^2 \cdot (x+1)^3} \right) + \ln \frac{27}{32} = \ln \left(\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^5}{(x-1)^2 \cdot (x+1)^3} \right) + \ln \frac{27}{32} = \\ &= \ln \left(\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{x}\right)^2 \cdot \left(1 + \frac{1}{x}\right)^3} \right) + \ln \frac{27}{32} = \ln 1 + \ln \frac{27}{32} = \ln \frac{27}{32} < \ln 1 = 0. \end{aligned}$$

Odpowiedź: Podana całka niewłaściwa ma wartość $\ln \frac{27}{32} < 0$.

Uwaga: Całki $\int_2^\infty \frac{1}{x-1} dx$, $\int_2^\infty \frac{1}{x} dx$, $\int_2^\infty \frac{1}{x+1} dx$ są rozbieżne, a granice

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \ln|x-1|, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \ln|x|, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \ln|x+1|$$

są nieskończone, nie mogą się więc pojawić w rozwiązaniu w konfiguracji prowadzącej do nieoznaczoności $\infty - \infty$.

234. Obliczyć wartość całki niewłaściwej $\int_4^\infty \frac{dx}{x \cdot (x+2) \cdot (x+5)}$. Doprowadzić wynik do postaci $w \cdot \ln \frac{p}{q}$, gdzie p , q są liczbami pierwszymi, a w liczbą wymierną dodatnią.

Zanim zajrzysz na kolejną stronę, rozwiąż powyższe zadanie, a przynajmniej podejmij próbę rozwiązania, aby wiedzieć, gdzie napotykasz trudności.

Rozwiązanie:

Rozkładamy funkcję podcałkową na sumę ułamków prostych:

$$\frac{1}{x \cdot (x+2) \cdot (x+5)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{x+5},$$

$$1 = A \cdot (x+2) \cdot (x+5) + B \cdot x \cdot (x+5) + C \cdot x \cdot (x+2).$$

Podstawiamy³ za x wartości 0, -2 i -5 otrzymując odpowiednio

$$\begin{array}{lll} \text{dla } x=0 & 1 = 10 \cdot A, & \text{skąd } A = 1/10, \\ \text{dla } x=-2 & 1 = -6 \cdot B, & \text{skąd } B = -1/6, \\ \text{dla } x=-5 & 1 = 15 \cdot C, & \text{skąd } C = 1/15. \end{array}$$

Wobec tego⁴

$$\begin{aligned} \int_4^{\infty} \frac{dx}{x \cdot (x+2) \cdot (x+5)} &= \int_4^{\infty} \frac{1/10}{x} - \frac{1/6}{x+2} + \frac{1/15}{x+5} dx = \\ &= \frac{1}{30} \cdot (3 \cdot \ln|x| - 5 \cdot \ln|x+2| + 2 \cdot \ln|x+5|) \Big|_{x=4}^{\infty} = \\ &= \left(\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{30} \cdot (3 \cdot \ln|x| - 5 \cdot \ln|x+2| + 2 \cdot \ln|x+5|) \right) \right) - \frac{1}{30} \cdot (3 \cdot \ln 4 - 5 \cdot \ln 6 + 2 \cdot \ln 9) = \\ &= \frac{1}{30} \cdot \left(\lim_{x \rightarrow \infty} \ln \frac{x^3 \cdot (x+5)^2}{(x+2)^5} \right) - \frac{1}{30} \cdot (6 \cdot \ln 2 - 5 \cdot \ln 2 - 5 \cdot \ln 3 + 4 \cdot \ln 3) = \\ &= \frac{1}{30} \cdot \ln \left(\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\left(1 + \frac{5}{x}\right)^2}{\left(1 + \frac{2}{x}\right)^5} \right) - \frac{1}{30} \cdot (\ln 2 - \ln 3) = \frac{1}{30} \cdot \ln 1 + \frac{1}{30} \cdot (\ln 3 - \ln 2) = \frac{1}{30} \cdot \ln \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

Odpowiedź: Podana całka niewłaściwa ma wartość $\frac{1}{30} \cdot \ln \frac{3}{2}$.

Uwaga: Całki

$$\int_4^{\infty} \frac{1}{x} dx, \quad \int_4^{\infty} \frac{1}{x+2} dx, \quad \int_4^{\infty} \frac{1}{x+5} dx$$

są rozbieżne, a granice

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \ln|x|, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \ln|x+2|, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \ln|x+5|$$

są nieskończone, nie mogą się więc pojawić w rozwiązaniu w konfiguracji prowadzącej do nieoznaczoności $\infty - \infty$.

235. Obliczyć wartość całki niewłaściwej $\int_{1/3}^{\infty} \frac{dx}{16x^3 + x}$. Doprowadzić wynik do postaci

$\ln w$, gdzie w liczbą wymierną dodatnią.

Zanim zajrzysz na kolejną stronę, rozwiąż powyższe zadanie, a przynajmniej podejmij próbę rozwiązania, aby wiedzieć, gdzie napotkasz trudności.

³Można też wymnożyć wyrażenia po prawej stronie, ułożyć układ trzech równań liniowych z trzema niewiadomymi A , B i C , porównując współczynniki przy jednakowych potęgach x 'a, a następnie rozwiązać ten układ równań.

⁴Argumenty logarytmów są dodatnie w przedziale całkowania, więc moduły można pominąć.

Rozwiązanie:

Rozkładamy funkcję podcałkową na sumę ułamków prostych:

$$\begin{aligned}\frac{1}{x \cdot (16x^2 + 1)} &= \frac{A}{x} + \frac{Bx + C}{16x^2 + 1}, \\ 1 &= A \cdot (16x^2 + 1) + (Bx + C) \cdot x, \\ 1 &= 16Ax^2 + A + Bx^2 + Cx, \\ 1 &= A, \quad 0 = C, \quad 0 = 16A + B, \\ A &= 1, \quad B = -16, \quad C = 0.\end{aligned}$$

Wobec tego⁵

$$\begin{aligned}\int_{1/3}^{\infty} \frac{dx}{x \cdot (16x^2 + 1)} &= \int_{1/3}^{\infty} \frac{1}{x} - \frac{16x}{16x^2 + 1} dx = \left(\ln|x| - \frac{1}{2} \cdot \ln(16x^2 + 1) \right) \Big|_{x=1/3}^{\infty} = \\ &= \ln \sqrt{\frac{x^2}{16x^2 + 1}} \Big|_{x=1/3}^{\infty} = \left(\lim_{x \rightarrow \infty} \ln \sqrt{\frac{x^2}{16x^2 + 1}} \right) - \ln \sqrt{\frac{1/9}{16/9 + 1}} = \ln \sqrt{\frac{1}{16}} - \ln \sqrt{\frac{1}{16 + 9}} = \\ &= \ln \frac{1}{4} - \ln \frac{1}{5} = \ln \frac{5}{4}.\end{aligned}$$

Odpowiedź: Podana całka niewłaściwa ma wartość $\ln \frac{5}{4}$.

Uwaga: Całki

$$\int_{1/3}^{\infty} \frac{1}{x} dx, \quad \int_{1/3}^{\infty} \frac{x}{16x^2 + 1} dx$$

są rozbieżne, a granice

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \ln|x|, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \ln(16x^2 + 1)$$

są nieskończone, nie mogą się więc pojawić w rozwiązaniu w konfiguracji prowadzącej do nieoznaczoności $\infty - \infty$.

Odpowiednie porządzenie sobie z przejściem granicznym jest kluczową częścią zadania. Bez tego elementu, nawet przy poprawnym wyniku liczbowym, zadanie nie może zostać uznane za rozwiązane.

236. Obliczyć wartość całki niewłaściwej $\int_7^{\infty} \frac{dx}{x^3 + x}$ lub wykazać, że całka ta jest rozbieżna.

Zanim zajrzysz na kolejną stronę, rozwiąż powyższe zadanie, a przynajmniej podejmij próbę rozwiązania, aby wiedzieć, gdzie napotykasz trudności.

⁵Argumenty logarytmów są dodatnie w przedziale całkowania, więc moduły można pominąć.

Rozwiązanie:

Rozkładamy funkcję podcałkową na sumę ułamków prostych:

$$\frac{1}{x^3+x} = \frac{1}{(x^2+1) \cdot x} = \frac{Ax+B}{x^2+1} + \frac{C}{x},$$

$$1 = (Ax+B) \cdot x + C \cdot (x^2+1),$$

$$1 = Ax^2 + Bx + Cx^2 + C,$$

$$\begin{cases} 0 &= A+C \\ 0 &= B \\ 1 &= C \end{cases}$$

Stąd otrzymujemy $A = -1$.

Wobec tego

$$\begin{aligned} \int_7^\infty \frac{dx}{x^3+x} &= \int_7^\infty -\frac{x}{x^2+1} + \frac{1}{x} dx = -\frac{\ln(x^2+1)}{2} + \ln|x| \Big|_{x=7}^\infty = \\ &= \left(\lim_{x \rightarrow \infty} \left(-\frac{\ln(x^2+1)}{2} + \ln x \right) \right) + \frac{\ln 50}{2} - \ln 7 = \left(\lim_{x \rightarrow \infty} \ln \sqrt{\frac{x^2}{x^2+1}} \right) + \frac{\ln 50}{2} - \ln 7 = \\ &= \left(\ln \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{1}{1+x^{-2}}} \right) + \frac{\ln 50}{2} - \ln 7 = \ln 1 + \frac{\ln 50}{2} - \ln 7 = \frac{\ln 50}{2} - \ln 7. \end{aligned}$$

Odpowiedź: Dana w zadaniu całka jest zbieżna i ma wartość $\frac{\ln 50}{2} - \ln 7$.

Uwaga: Poprawne wykonanie przejścia granicznego jest istotną częścią zadania. Bez tego zadanie nie może być uzanane za rozwiązane nawet przy poprawnym wyniku liczbowym.

237. Obliczyć wartość całki niewłaściwej $\int_6^\infty \frac{3x+2}{x^3-4x} dx$ lub wykazać, że całka ta jest rozbieżna.

Zanim zajrzysz na kolejną stronę, rozwiąż powyższe zadanie, a przynajmniej podejmij próbę rozwiązania, aby wiedzieć, gdzie napotykasz trudności.

Rozwiązanie:

Rozkładamy funkcję podcałkową na sumę ułamków prostych:

$$\frac{3x+2}{x^3-4x} = \frac{3x+2}{(x-2) \cdot x \cdot (x+2)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x} + \frac{C}{x+2},$$

$$3x+2 = A \cdot x \cdot (x+2) + B \cdot (x-2) \cdot (x+2) + C \cdot (x-2) \cdot x. \quad (\heartsuit)$$

W tym miejscu można wymnożyć iloczyny po prawej stronie równości $(\heartsuit)$, a następnie porównując współczynniki występujące po obu jej stronach uzyskać układ trzech równań liniowych z trzema niewiadomymi A, B, C .

My jednak wybierzemy inną drogę, a mianowicie podstawimy w równości $(\heartsuit)$ kolejno $x=2$, $x=0$, $x=-2$ otrzymując odpowiednio

$$\begin{aligned} 8 &= 8A, & \text{skąd} & \quad A = 1, \\ 2 &= -4B, & \text{skąd} & \quad B = -\frac{1}{2}, \\ -4 &= 8C, & \text{skąd} & \quad C = -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Wobec tego

$$\begin{aligned} \int_6^\infty \frac{3x+2}{x^3-4x} dx &= \int_6^\infty \frac{1}{x-2} - \frac{1/2}{x} - \frac{1/2}{x+2} dx = \ln|x-2| - \frac{\ln|x|}{2} - \frac{\ln|x+2|}{2} \Bigg|_{x=6}^\infty = \\ &= \left(\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\ln|x-2| - \frac{\ln|x|}{2} - \frac{\ln|x+2|}{2} \right) \right) - \ln 4 + \frac{\ln 6}{2} + \frac{\ln 8}{2} = \\ &= \left(\lim_{x \rightarrow \infty} \ln \frac{x-2}{\sqrt{x \cdot (x+2)}} \right) + \frac{-2 \cdot \ln 4 + \ln 6 + \ln 8}{2} = \\ &= \ln \left(\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x-2}{\sqrt{x \cdot (x+2)}} \right) + \frac{-4 \cdot \ln 2 + \ln 2 + \ln 3 + 3 \cdot \ln 2}{2} = \\ &= \ln \left(\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{2}{x}}{\sqrt{1 + \frac{2}{x}}} \right) + \frac{\ln 3}{2} = \ln 1 + \frac{\ln 3}{2} = 0 + \frac{\ln 3}{2} = \frac{\ln 3}{2}. \end{aligned}$$

Odpowiedź: Podana całka niewłaściwa jest zbieżna i ma wartość $\frac{\ln 3}{2}$.

238. Obliczyć wartość całki niewłaściwej $\int_5^\infty \frac{2x+3}{x^3-9x} dx$ lub wykazać, że całka ta jest rozbieżna.

Zanim zajrzysz na kolejną stronę, rozwiąż powyższe zadanie, a przynajmniej podejmij próbę rozwiązania, aby wiedzieć, gdzie napotykasz trudności.

Rozwiązanie:

Rozkładamy funkcję podcałkową na sumę ułamków prostych:

$$\frac{2x+3}{x^3-9x} = \frac{2x+3}{(x-3) \cdot x \cdot (x+3)} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x} + \frac{C}{x+3},$$

$$2x+3 = A \cdot x \cdot (x+3) + B \cdot (x-3) \cdot (x+3) + C \cdot (x-3) \cdot x. \quad (\heartsuit)$$

W tym miejscu można wymnożyć iloczyny po prawej stronie równości $(\heartsuit)$, a następnie porównując współczynniki występujące po obu jej stronach uzyskać układ trzech równań liniowych z trzema niewiadomymi A, B, C .

My jednak wybierzemy inną drogę, a mianowicie podstawimy w równości $(\heartsuit)$ kolejno $x=3$, $x=0$, $x=-3$ otrzymując odpowiednio

$$9 = 18A, \quad \text{skąd} \quad A = \frac{1}{2},$$

$$3 = -9B, \quad \text{skąd} \quad B = -\frac{1}{3},$$

$$-3 = 18C, \quad \text{skąd} \quad C = -\frac{1}{6}.$$

Wobec tego

$$\begin{aligned} \int_5^\infty \frac{2x+3}{x^3-9x} dx &= \int_5^\infty \frac{1/2}{x-3} - \frac{1/3}{x} - \frac{1/6}{x+3} dx = \frac{\ln|x-3|}{2} - \frac{\ln|x|}{3} - \frac{\ln|x+3|}{6} \Big|_{x=5}^\infty = \\ &= \left(\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{\ln|x-3|}{2} - \frac{\ln|x|}{3} - \frac{\ln|x+3|}{6} \right) \right) - \frac{\ln 2}{2} + \frac{\ln 5}{3} + \frac{\ln 8}{6} = \\ &= \left(\lim_{x \rightarrow \infty} \ln \sqrt[6]{\frac{(x-3)^3}{x^2 \cdot (x+3)}} \right) - \frac{\ln 2}{2} + \frac{\ln 5}{3} + \frac{\ln 2}{2} = \ln \left(\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[6]{\frac{(x-3)^3}{x^2 \cdot (x+3)}} \right) + \frac{\ln 5}{3} = \\ &= \ln \left(\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[6]{\frac{\left(1 - \frac{3}{x}\right)^3}{1 + \frac{3}{x}}} \right) + \frac{\ln 5}{3} = \ln 1 + \frac{\ln 5}{3} = 0 + \frac{\ln 5}{3} = \frac{\ln 5}{3}. \end{aligned}$$

Odpowiedź: Podana całka niewłaściwa jest zbieżna i ma wartość $\frac{\ln 5}{3}$.