

Dzień 15 (piątek 3 kwietnia 2020)**Całki niewłaściwe – badanie zbieżności**

Dziś zajmiemy się badaniem zbieżności całek niewłaściwych, w których funkcja podcałkowa jest nieujemna. Taka całka jest geometrycznym polem pewnej figury, na ogół nieograniczonej. Zbieżność takiej całki jest równoznaczna ze skończonością takiego pola. A sama całka zawsze albo ma wartość skończoną, albo jest rozbieżna do $+\infty$.

Do tego celu posłużą nam dwa elementy:

- kryterium porównawcze,
- rodzina całek o znanej zbieżności, do której będziemy porównywać¹ badaną całkę.

Najpierw kryterium porównawcze. Nie mówi ono nic więcej niż to, że większe od dużego jest duże, a mniejsze od małego jest małe.

A konkretnie: załóżmy, że $-\infty \leq a < b \leq +\infty$, funkcje $f, g: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ są ciągłe, a ponadto dla każdego $x \in (a, b)$ zachodzą nierówności

$$0 \leq f(x) \leq g(x).$$

Jeżeli całka $\int_a^b f(x) dx$ jest rozbieżna, to całka $\int_a^b g(x) dx$ też jest rozbieżna.

Jeżeli całka $\int_a^b g(x) dx$ jest zbieżna, to całka $\int_a^b f(x) dx$ też jest zbieżna.

Obie powyższe implikacje są równoważne², więc po co dwa razy powtarzać to samo? Po prostu wygodnie jest pamiętać obydwie wersje i korzystać z tej, która jest nam aktualnie potrzebna.

Dla całek niewłaściwych o nieujemnej funkcji podcałkowej nie musimy słowami wypowiadać faktu ich zbieżności bądź rozbieżności. Wystarczy napisać całkę oraz ∞ i postawić między nimi znak równości lub ostrą nierówność.

W praktyce stosowanie kryterium porównawczego sprowadza się do szacowań, które zapisujemy w ciągu nierówności tak:

$$\int_a^b f(x) dx \leq \dots \text{ tu leżą jakieś szacowania } \dots \leq \int_a^b g(x) dx < \infty \quad ^3$$

albo tak:

$$\int_a^b g(x) dx \geq \dots \text{ tu leżą jakieś szacowania } \dots \geq \int_a^b f(x) dx = \infty. \quad ^4$$

¹Przez odpowiednie szacowanie.

²Każda jest transpozycją drugiej.

³I formułujemy wniosek: całka $\int_a^b f(x) dx$ jest zbieżna.

⁴I formułujemy wniosek: całka $\int_a^b g(x) dx$ jest rozbieżna.

Do tego wszystkiego potrzebujemy wzorcowych całek, których zbieżność sobie raz rozstrzygniemy bezpośrednim całkowaniem, i do których będziemy porównywać inne całki.

Nie będę się silił na wielkie ogólności, z których niewiele wynika. Dlatego przedstawiona rodzina całek będzie możliwie prosta, ale wystarczająca, aby zaobserwować najciekawsze zjawiska.

Oto nasze wzorce:

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^p} \quad \text{oraz} \quad \int_1^\infty \frac{dx}{x^p}.$$

Wyliczamy bezpośrednio⁵

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^p} = \int_0^1 x^{-p} dx = \left. \frac{x^{1-p}}{1-p} \right|_{x=0}^1 = \frac{1}{1-p} - \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^{1-p}}{1-p} = \begin{cases} 1/(1-p) & \text{dla } p < 1 \\ +\infty & \text{dla } p > 1 \end{cases}$$

Natomiast dla $p = 1$ otrzymujemy

$$\int_0^1 \frac{dx}{x} = \ln x \Big|_{x=0}^1 = - \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = +\infty.$$

Wniosek: Całka $\int_0^1 \frac{dx}{x^p}$ jest zbieżna dla $p < 1$ i rozbieżna dla $p \geq 1$.

Podobnie postępujemy z drugą całką:

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x^p} = \int_1^\infty x^{-p} dx = \left. \frac{x^{1-p}}{1-p} \right|_{x=1}^\infty = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^{1-p}}{1-p} - \frac{1}{1-p} = \begin{cases} -1/(1-p) & \text{dla } p > 1 \\ +\infty & \text{dla } p < 1 \end{cases}$$

Dla $p = 1$ otrzymujemy

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x} = \ln x \Big|_{x=1}^\infty = \lim_{x \rightarrow \infty} \ln x = +\infty.$$

Wniosek: Całka $\int_1^\infty \frac{dx}{x^p}$ jest zbieżna dla $p > 1$ i rozbieżna dla $p \leq 1$.

Wniosek: Całka $\int_0^\infty \frac{dx}{x^p}$ jest rozbieżna dla każdego p . Jednak jeżeli $p \neq 1$, to niecałkowalna osobliwość jest tylko w jednym końcu przedziału całkowania.

Zadania

239. Udowodnić zbieżność całki niewłaściwej $\int_0^\infty \frac{x^\pi dx}{x^5 + x^4}$.

Zanim zajrzysz na kolejną stronę, rozwiąż powyższe zadanie, a przynajmniej podejmij próbę rozwiązania, aby wiedzieć, gdzie napotykasz trudności.

⁵Przy założeniu $p \neq 1$.

Rozwiązanie:

Dzieląc przedział całkowania otrzymujemy

$$\int_0^{\infty} \frac{x^{\pi} dx}{x^5 + x^4} = \int_0^1 \frac{x^{\pi} dx}{x^5 + x^4} + \int_1^{\infty} \frac{x^{\pi} dx}{x^5 + x^4}.$$

Wykażemy, że każda z dwóch całek występujących w powyższej sumie jest zbieżna. W tym celu zauważymy, że funkcja podcałkowa jest dodatnia i skorzystamy z kryterium porównawczego dla całek niewłaściwych.

Otrzymujemy

$$\int_0^1 \frac{x^{\pi} dx}{x^5 + x^4} \leq \int_0^1 \frac{x^{\pi} dx}{0 + x^4} = \int_0^1 \frac{dx}{x^{4-\pi}} < +\infty,$$

bo $4 - \pi < 1$.

Podobnie

$$\int_1^{\infty} \frac{x^{\pi} dx}{x^5 + x^4} \leq \int_1^{\infty} \frac{x^{\pi} dx}{x^5 + 0} = \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^{5-\pi}} < +\infty,$$

bo $5 - \pi > 1$.

240. Udowodnić zbieżność całki niewłaściwej $\int_0^{\infty} \frac{x^{\pi} dx}{\sqrt{x^9 + x^8}}$.

Zanim zajrzysz na kolejną stronę, rozwiąż powyższe zadanie, a przynajmniej podejmij próbę rozwiązania, aby wiedzieć, gdzie napotkasz trudności.

Rozwiązanie:

Dzieląc przedział całkowania otrzymujemy

$$\int_0^{\infty} \frac{x^{\pi} dx}{\sqrt{x^9+x^8}} = \int_0^1 \frac{x^{\pi} dx}{\sqrt{x^9+x^8}} + \int_1^{\infty} \frac{x^{\pi} dx}{\sqrt{x^9+x^8}}.$$

Wykażemy, że każda z dwóch całek występujących w powyższej sumie jest zbieżna. W tym celu zauważymy, że funkcja podcałkowa jest dodatnia i skorzystamy z kryterium porównawczego dla całek niewłaściwych.

Otrzymujemy

$$\int_0^1 \frac{x^{\pi} dx}{\sqrt{x^9+x^8}} \leq \int_0^1 \frac{x^{\pi} dx}{\sqrt{0+x^8}} = \int_0^1 \frac{dx}{x^{4-\pi}} < +\infty,$$

bo $4-\pi < 1$.

Podobnie

$$\int_1^{\infty} \frac{x^{\pi} dx}{\sqrt{x^9+x^8}} \leq \int_1^{\infty} \frac{x^{\pi} dx}{\sqrt{x^9+0}} = \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^{4,5-\pi}} < +\infty,$$

bo $4,5-\pi > 1$.

241. Udowodnić zbieżność całki niewłaściwej $\int_0^{\infty} \frac{x^e dx}{x^4+x^3}$.

Zanim zajrzysz na kolejną stronę, rozwiąż powyższe zadanie, a przynajmniej podejmij próbę rozwiązania, aby wiedzieć, gdzie napotykasz trudności.

Rozwiązanie:

Dzieląc przedział całkowania otrzymujemy

$$\int_0^{\infty} \frac{x^e dx}{x^4 + x^3} = \int_0^1 \frac{x^e dx}{x^4 + x^3} + \int_1^{\infty} \frac{x^e dx}{x^4 + x^3}.$$

Wykażemy, że każda z dwóch całek występujących w powyższej sumie jest zbieżna. W tym celu zauważymy, że funkcja podcałkowa jest dodatnia i skorzystamy z kryterium porównawczego dla całek niewłaściwych.

Otrzymujemy

$$\int_0^1 \frac{x^e dx}{x^4 + x^3} \leq \int_0^1 \frac{x^e dx}{0 + x^3} = \int_0^1 \frac{dx}{x^{3-e}} < +\infty,$$

bo $3 - e < 1$.

Podobnie

$$\int_1^{\infty} \frac{x^e dx}{x^4 + x^3} \leq \int_1^{\infty} \frac{x^e dx}{x^4 + 0} = \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^{4-e}} < +\infty,$$

bo $4 - e > 1$.

242. Udowodnić zbieżność całki niewłaściwej $\int_0^{\infty} \frac{\sqrt{x^5 + x^3}}{\sqrt[3]{x^{11} + x^7}} dx$.

Zanim zajrzysz na kolejną stronę, rozwiąż powyższe zadanie, a przynajmniej podejmij próbę rozwiązania, aby wiedzieć, gdzie napotykasz trudności.

Rozwiązanie:

Dzieląc przedział całkowania otrzymujemy

$$\int_0^{\infty} \frac{\sqrt{x^5+x^3}}{\sqrt[3]{x^{11}+x^7}} dx = \int_0^1 \frac{\sqrt{x^5+x^3}}{\sqrt[3]{x^{11}+x^7}} dx + \int_1^{\infty} \frac{\sqrt{x^5+x^3}}{\sqrt[3]{x^{11}+x^7}} dx.$$

Wykażemy, że każda z dwóch całek występujących w powyższej sumie jest zbieżna. W tym celu zauważymy, że funkcja podcałkowa jest dodatnia i skorzystamy z kryterium porównawczego dla całek niewłaściwych.

Otrzymujemy

$$\int_0^1 \frac{\sqrt{x^5+x^3}}{\sqrt[3]{x^{11}+x^7}} dx \leq \int_0^1 \frac{\sqrt{3x^3+x^3}}{\sqrt[3]{0+x^7}} dx = 2 \cdot \int_0^1 \frac{dx}{x^{5/6}} < +\infty,$$

bo $5/6 < 1$.

Podobnie

$$\int_1^{\infty} \frac{\sqrt{x^5+x^3}}{\sqrt[3]{x^{11}+x^7}} dx \leq \int_1^{\infty} \frac{\sqrt{x^5+3x^5}}{\sqrt[3]{x^{11}+0}} dx = 2 \cdot \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^{7/6}} < +\infty,$$

bo $7/6 > 1$.

243. Wyznaczyć zbiór wszystkich wartości rzeczywistych parametru p , dla których całka niewłaściwa $\int_0^{\infty} \frac{x^p}{\sqrt{x^4+x^3}} dx$ jest zbieżna.

Zanim zajrzysz na kolejną stronę, rozwiąż powyższe zadanie, a przynajmniej podejmij próbę rozwiązania, aby wiedzieć, gdzie napotykasz trudności.

Rozwiązanie:

Dzieląc przedział całkowania otrzymujemy

$$\int_0^{\infty} \frac{x^p}{\sqrt{x^4+x^3}} dx = \int_0^1 \frac{x^p}{\sqrt{x^4+x^3}} dx + \int_1^{\infty} \frac{x^p}{\sqrt{x^4+x^3}} dx.$$

Zbadamy, dla których wartości parametru p całki występujące w powyższej sumie są zbieżne. W tym celu zauważymy, że funkcja podcałkowa jest dodatnia i skorzystamy z kryterium porównawczego dla całek niewłaściwych.

Otrzymujemy

$$\int_0^1 \frac{x^p}{\sqrt{x^4+x^3}} dx \leq \int_0^1 \frac{x^p}{\sqrt{0+x^3}} dx = \int_0^1 \frac{dx}{x^{3/2-p}} < +\infty,$$

o ile $3/2 - p < 1$, czyli $p > 1/2$.

Ponadto

$$\int_0^1 \frac{x^p}{\sqrt{x^4+x^3}} dx \geq \int_0^1 \frac{x^p}{\sqrt{x^3+x^3}} dx = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \int_0^1 \frac{dx}{x^{3/2-p}} = +\infty,$$

o ile $3/2 - p \geq 1$, czyli $p \leq 1/2$.

Podobnie

$$\int_1^{\infty} \frac{x^p}{\sqrt{x^4+x^3}} dx \leq \int_1^{\infty} \frac{x^p}{\sqrt{x^4+0}} dx = \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^{2-p}} < +\infty,$$

o ile $2 - p > 1$, czyli $p < 1$.

Ponadto

$$\int_1^{\infty} \frac{x^p}{\sqrt{x^4+x^3}} dx \geq \int_1^{\infty} \frac{x^p}{\sqrt{x^4+x^4}} dx = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^{2-p}} = +\infty,$$

o ile $2 - p \leq 1$, czyli $p \geq 1$.

Wniosek: Jeżeli $1/2 < p < 1$, to obydwie całki powstałe z podziału przedziału całkowania są zbieżne, a więc i wyjściowa całka jest zbieżna. W przeciwnym razie jedna z tych całek jest rozbieżna, a zatem wyjściowa całka jest rozbieżna.

Odpowiedź: Podana całka jest zbieżna dla $p \in (1/2, 1)$.