

Dzień 16 (poniedziałek 6 kwietnia 2020)**Szeregowe kryterium zbieżności całek.****ALBO¹****Całkowe kryterium zbieżności szeregów.**

Przypomnijmy jeden z wniosków z piątkowego wykładu:

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^p} \quad \begin{cases} < +\infty & (\text{całka jest zbieżna}) & \text{dla } p > 1 \\ = +\infty & (\text{całka jest rozbieżna}) & \text{dla } p \leq 1 \end{cases}$$

Może pamiętacie z pierwszego semestru, że:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} \quad \begin{cases} < +\infty & (\text{szereg jest zbieżny}) & \text{dla } p > 1 \\ = +\infty & (\text{szereg jest rozbieżny}) & \text{dla } p \leq 1 \end{cases}$$

Patrząc na powyższe przykłady nie sposób nie zadać sobie następującego pytania. Co prawda ciąg i funkcja określona na przedziale $[1, +\infty)$ to dwa bardzo różne obiekty matematyczne, ale często są one definiowane bardzo podobnymi wzorkami². Czy w świetle powyższych przykładów powinniśmy oczekiwać, że zbieżność szeregu będzie równoważna zbieżności odpowiadającej mu całki niewłaściwej?

Raczej nie należy oczekiwać, że będzie aż tak dobrze bez jakichkolwiek założeń. Poza tym z funkcji f można zawsze zrobić odpowiadający jej ciąg (a_n) przyjmując $a_n = f(n)$, ale w drugą stronę to już może być gorzej. Bo tak jak z ciągiem określonym wzorem

$$a_n = \frac{7n^8 + n^3 + \sqrt{n}}{n^9 + 2^n}$$

bez namysłu skojarzymy funkcję

$$f(x) = \frac{7x^8 + x^3 + \sqrt{x}}{x^9 + 2^x},$$

tak we wzorach definiujących ciąg

$$a_n = (-1)^n \quad \text{oraz} \quad b_n = \frac{1}{p_n} \quad ^3$$

trudno byłoby zamiast n wstawić x i pozwalać temu x -owi przyjmować dowolne wartości rzeczywiste większe od 1. Bo nie ma sensu wyrażenie⁴ $(-1)^{\sqrt{2}}$, ani mówienie o π -tej liczbie pierwszej⁵.

Pytamy więc, przy jakich sensownych założeniach o funkcji $f: [1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ mamy gwarancję równoważności zbieżności szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n) \quad \text{oraz całki niewłaściwej} \quad \int_1^{\infty} f(x) dx.$$

¹Niepotrzebne skreślić.

²Dokładniej: chodzi o wzorek na wyraz ogólny ciągu (zwykle wyrażenie zależne od n) oraz wzorek definiujący funkcję (zwykle wzorek zależny od x). Wzorki te mogą się różnić tylko tym, że literka n została zamieniona na literkę x .

³Przez p_n oznaczamy n -tą liczbę pierwszą, np. $p_1 = 2$, $p_2 = 3$, $p_{12} = 37$, $p_{21} = 73$, $p_{25} = 97$.

⁴Przynajmniej w zakresie liczb rzeczywistych.

⁵Chyba że jakiś producent wprowadzi na rynek napój o nazwie "Liczba pierwsza".

Okazuje się, że takie założenia są dwa:

- funkcja f powinna przyjmować tylko wartości dodatnie⁶,
- funkcja f powinna być nierosnąca.

Mamy więc następujące kryterium:

Niech $f : [1, +\infty) \rightarrow (0, \infty)$ będzie funkcją⁷ nierosnącą. Wówczas szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$$

jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy zbieżna jest całka niewłaściwa

$$\int_1^{\infty} f(x) dx.$$

Ponieważ w przypadku całki niewłaściwej z funkcji nieujemnej czy szeregu o wyrazach nieujemnych, zbieżność i rozbieżność można wyrazić przyrównując całkę czy sumę szeregu do nieskończoności⁸, tezę powyższego kryterium możemy zapisać symbolicznie tak:

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n) < \infty \quad \Leftrightarrow \quad \int_1^{\infty} f(x) dx < \infty.$$

Ideę dowodu powyższego kryterium można prześledzić na rysunkach 1 i 2.

Z rysunków tych wynikają nierówności

$$\sum_{n=2}^{\infty} f(n) \leq \int_1^{\infty} f(x) dx \leq \sum_{n=1}^{\infty} f(n),$$

co jest równoważne nierównościom

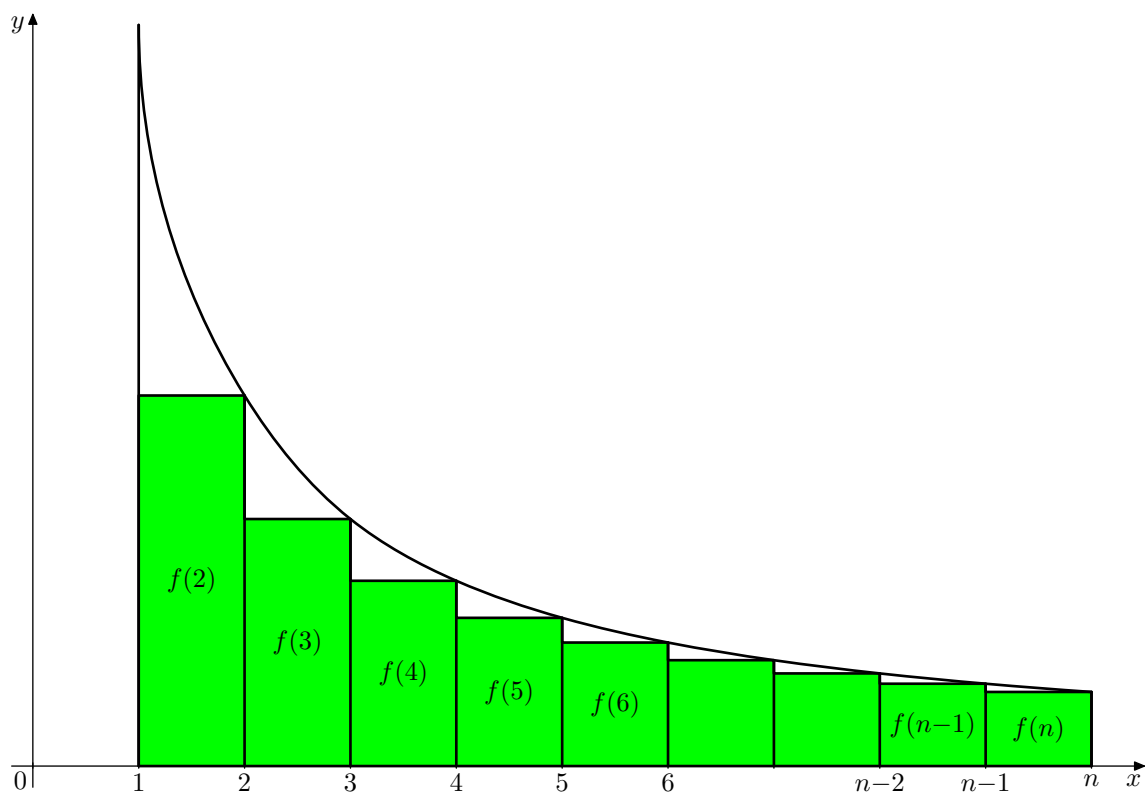
$$\int_1^{\infty} f(x) dx \leq \sum_{n=1}^{\infty} f(n) \leq \int_1^{\infty} f(x) dx + f(1).$$

Z powyższych nierówności wynika, że albo i całka i suma szeregu są skończone, albo i jedno i drugie jest nieskończone.

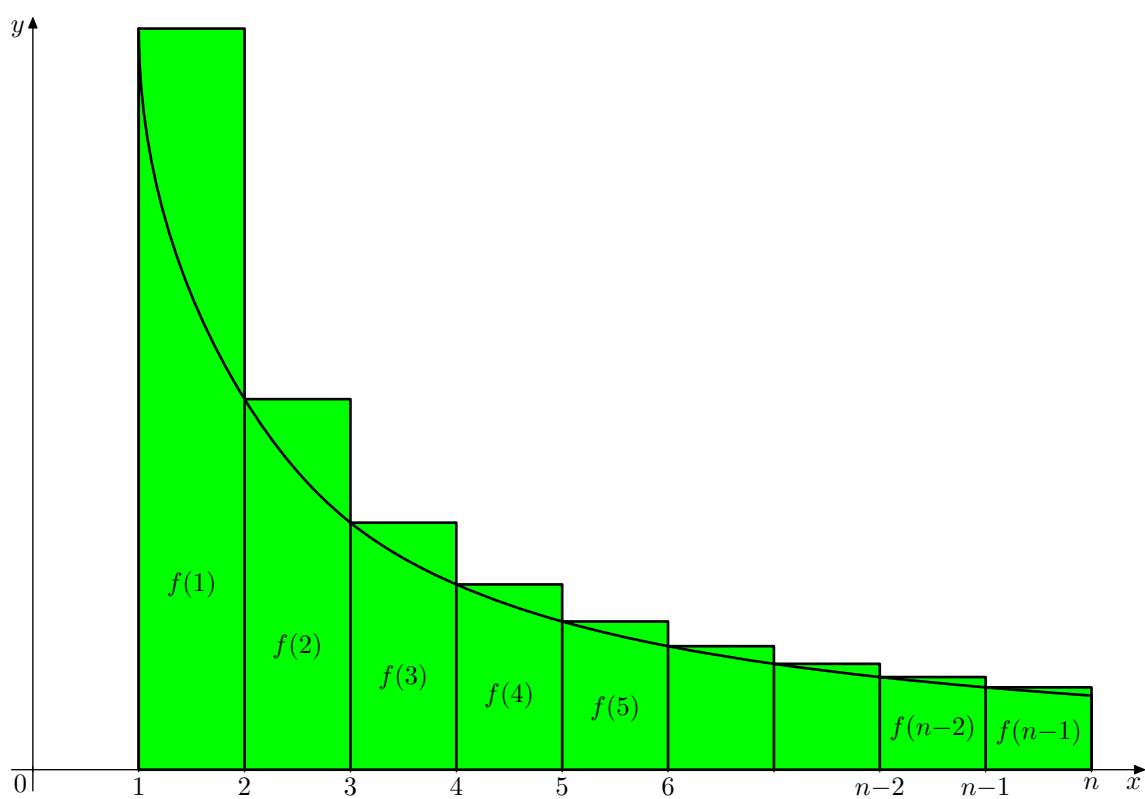
⁶Na siłę można byłoby napisać "nieujemne", ale wobec monotoniczności osiągnięcie wartości 0 wymusiłoby zerowanie się funkcji dla wszystkich odpowiednio dużych argumentów. W konsekwencji odpowiadający jej szereg liczbowy miałby od pewnego miejsca tylko wyrazy zerowe. Zbieżność zarówno całki jak i szeregu byłaby w tym wypadku zbyt oczywista, aby była ciekawa.

⁷O dziwo nie założyłem, że f jest ciągła. Bez żadnej szkody możemy sobie to założenie dopisać. Okazuje się jednak, że w przypadku funkcji monotonicznej ewentualne nieciągłości nie zaburzają całkowalności. Jednak wchodzenie w tym momencie w szczegóły wykracza poza zakres wykładu. Innym warunkiem, który mógłby się tu pojawić jest założenie $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$. To założenie nie jest do niczego potrzebne, ale jeśli nie jest ono spełnione, to zarówno całka jak i szereg są rozbieżne, więc niczego specjalnie ciekawego nie uzyskujemy. Założenie to może jednak spełniać rolę zwrócenia uwagi na interesujący przypadek i dlatego nie wykluczyłem, że się gdzieś tam w literaturze pojawia.

⁸Albowiem pytanie o zbieżność jest pytaniem o skończoność geometrycznego pola pod wykresem funkcji czy też o skończoność sumy wyrazów szeregu.



rys. 1



rys. 2

Kryterium to nosi nazwę (a jednak) **całkowego kryterium zbieżności szeregów**, a nie *szeregowego kryterium zbieżności całek*. Powód tego jest następujący: Na ogół łatwiej obliczyć wartość całki niż sumę szeregu, czy choćby sumę częściową. Dlatego w typowej sytuacji stosowalności tego kryterium, jesteśmy w stanie stosunkowo łatwo obliczyć całkę, a w przypadku szeregu napotykamy na trudności nie tylko z obliczeniem sumy, ale wręcz z rozstrzygnięciem zbieżności.

W tym miejscu należy po raz kolejny przypomnieć, że zbieżność szeregu nie zależy od zmiany dolnej granicy sumowania, a zbieżność całki niewłaściwej $\int_1^{\infty} f(x) dx$ nie zależy⁹ od zmiany dolnej granicy całkowania.

Skoro szereg $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ i całka $\int_1^{\infty} f(x) dx$ wykazują tyle podobieństw, to nasuwa się pytanie, czy można też przenieść inne kryteria zbieżności szeregów na kryteria zbieżności całek niewłaściwych. Pierwsze kryterium, które przychodzi tu na myśl, to warunek konieczny zbieżności szeregów:

Jeżeli $a_n \not\rightarrow 0$, to szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest rozbieżny.

Naturalne byłoby oczekiwać, że:

Jeżeli $f(x) \not\rightarrow 0$ przy $x \rightarrow \infty$, to całka $\int_1^{\infty} f(x) dx$ jest rozbieżna.

O dziwo, takie kryterium nie jest prawdziwe !!!

Przykład funkcji, dla której takie "kryterium" nie jest prawdziwe, widzimy na rysunku 3. Funkcja ta jest zerowa poza otoczeniami liczb naturalnych, gdzie jej wykres stanowią wąskie i wysokie trójkąty równoramienne. Można by ją oczywiście zapisać wzorem, z którego niewiele byłoby widać, więc poprzestańmy na rysunku z dodatkowym doprecyzowaniem, że trójkąt w okolicy liczby n ma podstawę długości $2/4^n$ oraz wysokość 2^n . To daje pole n -tego zielonego trójkąta równe $1/2^n$, wobec czego¹⁰

$$\int_1^{\infty} f(x) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}.$$

Oczywiście granica $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ nie istnieje, a co więcej funkcja f jest nieograniczona, gdyż w miarę posuwania się do $+\infty$ zdarza jej się przyjmować dowolnie duże wartości.

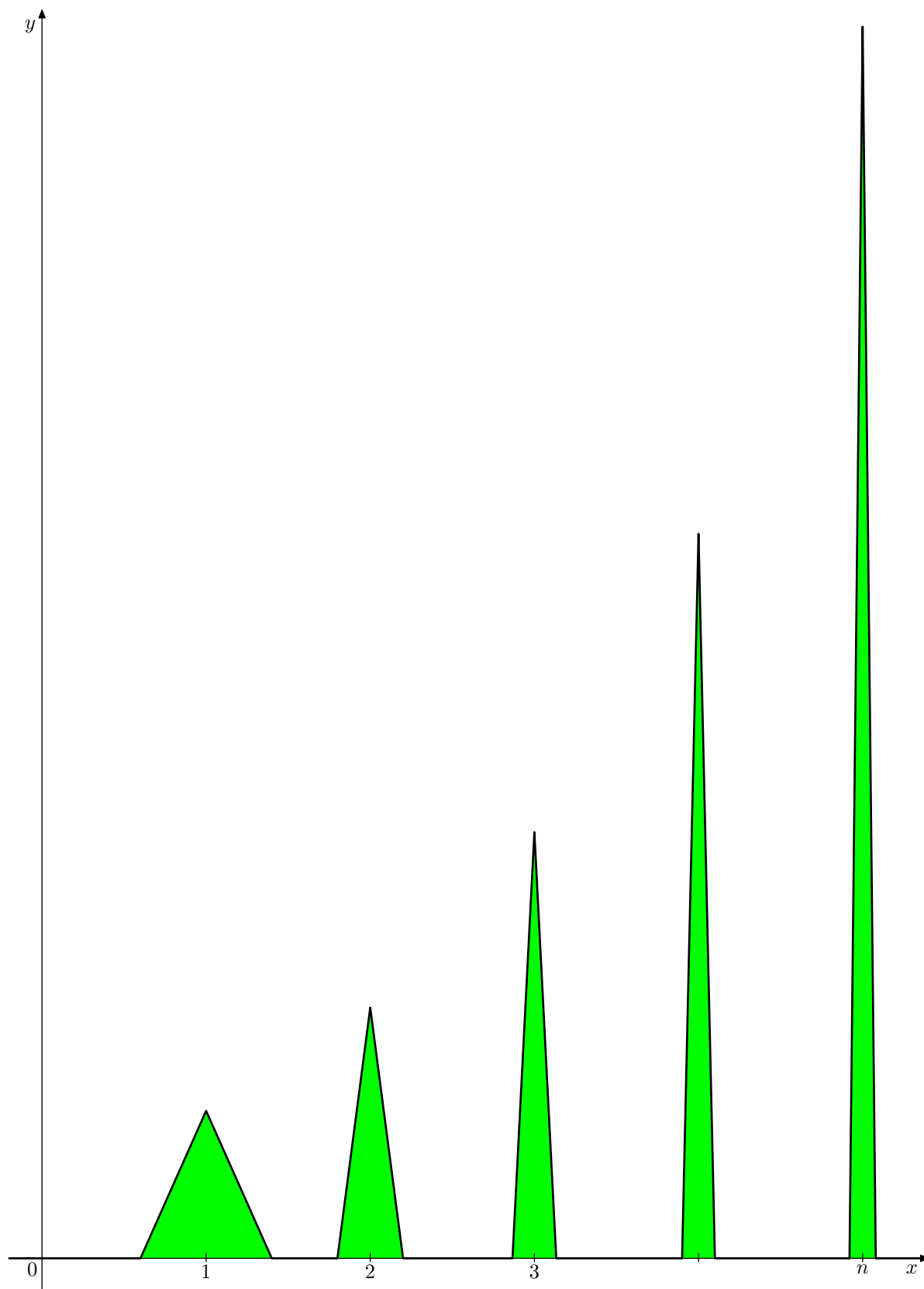
Jednocześnie ten przykład pokazuje, że w kryterium całkowym zbieżności szeregów założenie monotoniczności jest bardzo istotne. W tym przypadku całka $\int_1^{\infty} f(x) dx$ jest zbieżna, a odpowiadający jej szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^n$$

jest rozbieżny i to w sposób spektakularny, bo jego wyrazy dążą do nieskończoności.

⁹Przy założeniu ciągłości funkcji f na przedziale domkniętym obejmującym wszystkie potencjalne dolne granice całkowania.

¹⁰Zauważmy, że do całki wchodzi tylko połowa pola pierwszego trójkąta.



rys. 3

Na koniec dzisiejszego wykładu jeszcze kilka komentarzy.

Kryterium całkowe ma szansę działać tylko dlatego, że dzięki monotoniczności funkcji podcałkowej znajomość jej wartości w punktach całkowitych pozwala nam z grubsza przewidzieć, co funkcja robi pomiędzy punktami całkowitymi. Bez monotoniczności znajomość wartości w punktach całkowitych nie pozwala przewidzieć, co się dzieje poza nimi, co jest świetnie widoczne na rysunku 3.

W związku z przykładem z rysunku 3 powstaje pytanie dlaczego¹¹ w szeregu zbieżnym wyrazy dążą do zera, a w zbieżnej całce niewłaściwej funkcja podcałkowa nie musi dążyć do zera w nieskończoności.

Otóż w szeregu rozmiar wyrazu odpowiada przyczynkowi tego wyrazu do zmiany sumy częściowej. Jeśli wyraz jest duży, to pociąga za sobą dużą zmianę sumy częściowej. W szeregu zbieżnym sumy częściowe się stabilizują – dalekie sumy częściowe zmieniają o bardzo mało, co wyklucza dalekie duże wyrazy.

Zupełnie inaczej jest z całką. Duża wartość funkcji¹² nie musi pociągać za sobą dużego przyczynku do całki, bo ta nawet kolosalna wartość może być przyjmowana na malusieńkim przedziałiku. W szeregu natomiast nie można dodać pół czy ćwierć czy miliardową część wyrazu. Dodajemy od razu cały wyraz – jak jest duży, to dodajemy dużo.

Gdyby jednak założyć, że f ma w nieskończoności granicę i ta granica jest różna od zera¹³, to całka $\int_1^{\infty} f(x) dx$ musiałaby być rozbieżna.

¹¹Słowo "dlaczego" nie pyta tu o formalny dowód, ale o istotę przyczyn, dla których mamy takie, a nie inne zjawiska.

¹²Myślmy o funkcji ciągłej, a więc duża wartość w jednym punkcie wymusza duże wartości w pewnym (być może bardzo małym) otoczeniu tego punktu.

¹³Mogłaby to też być granica niewłaściwa $\pm\infty$.