

Dzień 17 (wtorek 7 kwietnia 2020)

Dziś kilka pouczających przykładów i trzy zadania z całek. Większość (ale nie wszystkie) dotyczą obliczania całek bez całkowania, to znaczy obliczania całek oznaczonych (w tym niewłaściwych) bez znajdowania funkcji pierwotnej.

A na końcu dzisiejszego wykładu znajdziecie zwiastun tego, co czeka Was jutro.

Przykład: Obliczyć całkę $\int_0^{\pi} \sin^2 x \, dx$.

Oczywiście można byłoby to wycałkować po skorzystaniu z odpowiedniego wzoru trygonometrycznego. Ale po co? Mamy całkować $\sin^2$ po pełnym okresie. Ponieważ sinus i kosinus to jest ta sama funkcja, tylko przesunięta, całka z $\cos^2$ po pełnym okresie będzie równa tyle samo:

$$\int_0^{\pi} \sin^2 x \, dx = \int_0^{\pi} \cos^2 x \, dx.$$

Zauważmy jednak, że

$$\int_0^{\pi} \sin^2 x \, dx + \int_0^{\pi} \cos^2 x \, dx = \int_0^{\pi} \sin^2 x + \cos^2 x \, dx = \int_0^{\pi} 1 \, dx = \pi.$$

Stąd

$$\int_0^{\pi} \sin^2 x \, dx = \int_0^{\pi} \cos^2 x \, dx = \frac{\pi}{2}.$$

Zapamiętaj: Funkcje $\sin^2$ i $\cos^2$ na całym okresie mają średnią wartość $1/2$.

Przykład: Obliczyć całki $\int_{-1}^1 \frac{dx}{x+x^{2021}}$ oraz $\int_{-1}^1 \frac{2020\sqrt{|x|}dx}{x+x^{2021}}$.

Pierwsza myśl: Funkcje podcałkowe są nieparzyste, a przedział całkowania symetryczny względem zera, więc obie całki są równe 0.

Niekoniecznie !!! Jest to prawdą dla zwykłych¹ całek, a także dla zbieżnych całek niewłaściwych. Ale jeśli całka niewłaściwa jest rozbieżna, to nie można jej przypisać wartości liczbowej. Obydwie całki mają wewnątrz przedziału całkowania osobliwość (w zerze). Jednak całka $\int_{-1}^1 \frac{dx}{x+x^{2021}}$ jest rozbieżna². Natomiast całka $\int_{-1}^1 \frac{2020\sqrt{|x|}dx}{x+x^{2021}}$ jest zbieżna³, a w związku z tym jej wartość jest równa 0.

Trzy całki

271. Obliczyć wartość całki oznaczonej $\int_0^{\pi} \sin^{2020} x - \cos^{2020} x \, dx$.

Zanim zajrzysz na kolejną stronę, rozwiąż powyższe zadanie, a przynajmniej podejmij próbę rozwiązania, aby wiedzieć, gdzie napotykasz trudności.

¹Czyli bez osobliwości.

²Dowód rozbieżności zostawiam dla Was jako proste ćwiczenie.

³A tu zostawiam dla Was dowód zbieżności – równie prosty.

Rozwiązanie:

Z równości

$$\cos x = \sin \left(x + \frac{\pi}{2} \right)$$

oraz

$$|\sin(x + \pi)| = |\sin x|$$

otrzymujemy

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} \cos^{2020} x \, dx &= \int_0^{\pi} \sin^{2020} \left(x + \frac{\pi}{2} \right) dx = \int_0^{\pi/2} \sin^{2020} \left(x + \frac{\pi}{2} \right) dx + \int_{\pi/2}^{\pi} \sin^{2020} \left(x + \frac{\pi}{2} \right) dx = \\ &= \int_0^{\pi/2} \sin^{2020} \left(x + \frac{\pi}{2} \right) dx + \int_{\pi/2}^{\pi} \sin^{2020} \left(x - \frac{\pi}{2} \right) dx = \int_{\pi/2}^{\pi} \sin^{2020} x \, dx + \int_0^{\pi/2} \sin^{2020} x \, dx = \\ &= \int_0^{\pi} \sin^{2020} x \, dx, \end{aligned}$$

skąd wynika, że dana w zadaniu całka ma wartość zero.

Odpowiedź: Dana w zadaniu całka oznaczona ma wartość 0.

Uwaga: Idea powyższych rachunków jest następująca: Funkcje $\sin^{2020}$ i $\cos^{2020}$ są całkowane po pełnym okresie równym π , a przy tym jest to ta sama funkcja, tylko przesunięta o $\pi/2$.

272. Obliczyć wartość całki niewłaściwej

$$\int_0^{\infty} \frac{x^5 - 1}{x^7 + 1} dx.$$

Wskazówka: Wykonać podstawienie $x = 1/t$ albo $x = e^t$.

Zanim zajrzysz na kolejną stronę, rozwiąż powyższe zadanie, a przynajmniej podejmij próbę rozwiązania, aby wiedzieć, gdzie napotykasz trudności.

Rozwiązanie:

Sposób I

Najpierw udowodnimy zbieżność danej całki. W tym celu zapiszemy ją w postaci sumy dwóch całek, a następnie zastosujemy kryterium porównawcze dla udowodnienia zbieżności składnika będącego całką niewłaściwą o nieujemnej funkcji podcałkowej:

$$\begin{aligned}\int_0^{\infty} \frac{x^5-1}{x^7+1} dx &= \int_0^1 \frac{x^5-1}{x^7+1} dx + \int_1^{\infty} \frac{x^5-1}{x^7+1} dx = -\int_0^1 \frac{1-x^5}{x^7+1} dx + \int_1^{\infty} \frac{x^5-1}{x^7+1} dx, \\ \int_1^{\infty} \frac{x^5-1}{x^7+1} dx &\leq \int_1^{\infty} \frac{x^5-0}{x^7+0} dx = \int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx < +\infty.\end{aligned}$$

Następnie wykonamy podstawienie $x=1/t$ i formalnie $dx=-dt/t^2$. Otrzymujemy:

$$I = \int_0^{\infty} \frac{x^5-1}{x^7+1} dx = \int_{\infty}^0 \frac{t^{-5}-1}{t^{-7}+1} \cdot \frac{-dt}{t^2} = \int_0^{\infty} \frac{t^{-5}-1}{t^{-5}+t^2} dt = \int_0^{\infty} \frac{(t^{-5}-1) \cdot t^5}{(t^{-5}+t^2) \cdot t^5} dt = \int_0^{\infty} \frac{1-t^5}{1+t^7} dt = -I,$$

skąd $I = -I$, czyli $I = 0$.

Odpowiedź

Dana całka jest zbieżna i ma wartość 0.

Sposób II

Dowodzimy zbieżności całki jak w sposobie I, a następnie wykonujemy podstawienie $x=e^t$, czyli $t=\ln x$, i formalnie $dx=e^t dt$. Otrzymujemy:

$$\begin{aligned}\int_0^{\infty} \frac{x^5-1}{x^7+1} dx &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{5t}-1}{e^{7t}+1} \cdot e^t dt = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{6t}-e^t}{e^{7t}+1} dt = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(e^{6t}-e^t) \cdot e^{-7t/2}}{(e^{7t}+1) \cdot e^{-7t/2}} dt = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{5t/2}-e^{-5t/2}}{e^{7t/2}+e^{-7t/2}} dt,\end{aligned}$$

co jest równe 0 jako całka z funkcji nieparzystej po przedziale symetrycznym względem zera.

273. Obliczyć wartość całki

$$\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} x \operatorname{arctg} \frac{1}{x} dx.$$

Zanim zajrzysz na kolejną stronę, rozwiąż powyższe zadanie, a przynajmniej podejmij próbę rozwiązania, aby wiedzieć, gdzie napotykasz trudności.

Rozwiązanie:

Wykonujemy podstawienie $x = 1/t$, czyli $t = 1/x$ i formalnie $dx = \frac{-dt}{t^2}$. Otrzymujemy (w międzyczasie całkując przez części):

$$\begin{aligned}
 \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} x \operatorname{arctg} \frac{1}{x} dx &= - \int_{-1/\sqrt{3}}^{1/\sqrt{3}} \frac{\operatorname{arctg} t}{t^3} dt = - \int_{-1/\sqrt{3}}^{1/\sqrt{3}} \frac{1}{t^3} \cdot \operatorname{arctg} t dt = \\
 &= \frac{1}{2t^2} \cdot \operatorname{arctg} t \Big|_{t=-1/\sqrt{3}}^{1/\sqrt{3}} - \frac{1}{2} \cdot \int_{-1/\sqrt{3}}^{1/\sqrt{3}} \frac{1}{t^2} \cdot \frac{1}{t^2+1} dt = \frac{3}{2} \cdot \frac{\pi}{6} - \frac{3}{2} \cdot \frac{-\pi}{6} - \frac{1}{2} \cdot \int_{-1/\sqrt{3}}^{1/\sqrt{3}} \frac{1}{t^2} - \frac{1}{t^2+1} dt = \\
 &= \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{t} - \operatorname{arctg} t \Big|_{t=-1/\sqrt{3}}^{1/\sqrt{3}} \right) = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \cdot \left(-\sqrt{3} - \frac{\pi}{6} - \sqrt{3} - \frac{\pi}{6} \right) = \frac{\pi}{2} + \sqrt{3} + \frac{\pi}{6} = \\
 &= \frac{2\pi}{3} + \sqrt{3}.
 \end{aligned}$$

**Zanim zajrzysz na kolejną stronę,
zastanów się dlaczego powyższe
rozwiązanie jest błędne !!!**

BŁĘDY:

1° Wykonane podstawienie nie przeprowadza przedziału całkowania $[-\sqrt{3}, \sqrt{3}]$ na przedział $[-1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}]$.

2° Uzyskana w wyniku błędnego podstawienia całka niewłaściwa jest rozbieżna. Funkcja podcałkowa ma osobliwość w punkcie 0.

Rozwiązania poprawne:

Sposób I:

Funkcja podcałkowa jest parzysta, a zatem

$$\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} x \operatorname{arctg} \frac{1}{x} dx = 2 \cdot \int_0^{\sqrt{3}} x \operatorname{arctg} \frac{1}{x} dx.$$

Wykonujemy podstawienie $x = 1/t$, czyli $t = 1/x$ i formalnie $dx = \frac{-dt}{t^2}$. Otrzymujemy (w międzyczasie całkując przez części):

$$\begin{aligned} \int_0^{\sqrt{3}} x \operatorname{arctg} \frac{1}{x} dx &= - \int_{\infty}^{1/\sqrt{3}} \frac{\operatorname{arctg} t}{t^3} dt = \int_{1/\sqrt{3}}^{\infty} \frac{1}{t^3} \cdot \operatorname{arctg} t dt = \\ &= -\frac{1}{2t^2} \cdot \operatorname{arctg} t \Big|_{t=1/\sqrt{3}}^{\infty} + \frac{1}{2} \cdot \int_{1/\sqrt{3}}^{\infty} \frac{1}{t^2} \cdot \frac{1}{t^2+1} dt = \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{2t^2} \cdot \operatorname{arctg} t \right) + \frac{3}{2} \cdot \frac{\pi}{6} + \frac{1}{2} \cdot \int_{1/\sqrt{3}}^{\infty} \frac{1}{t^2} - \frac{1}{t^2+1} dt = \\ &= 0 + \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{t} - \operatorname{arctg} t \Big|_{t=1/\sqrt{3}}^{\infty} \right) = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{\pi}{2} + \sqrt{3} + \frac{\pi}{6} \right) = \frac{\pi}{4} + \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{6} = \\ &= \frac{\pi}{12} + \frac{\sqrt{3}}{2}. \end{aligned}$$

Odpowiedź: Wartość podanej całki jest równa $\sqrt{3} + \frac{\pi}{6}$.

Sposób II:

Funkcja podcałkowa jest parzysta, a zatem

$$\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} x \operatorname{arctg} \frac{1}{x} dx = 2 \cdot \int_0^{\sqrt{3}} x \operatorname{arctg} \frac{1}{x} dx.$$

Korzystamy z równości

$$\operatorname{arctg} \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x \quad \text{dla } x > 0.$$

Otrzymujemy (w międzyczasie całkując przez części):

$$\begin{aligned} \int_0^{\sqrt{3}} x \operatorname{arctg} \frac{1}{x} dx &= \int_0^{\sqrt{3}} x \cdot \left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x \right) dx = \frac{\pi}{2} \cdot \int_0^{\sqrt{3}} x dx - \int_0^{\sqrt{3}} x \cdot \operatorname{arctg} x dx = \\ &= \frac{\pi x^2}{4} \Big|_{x=0}^{\sqrt{3}} - \frac{x^2 \cdot \operatorname{arctg} x}{2} \Big|_{x=0}^{\sqrt{3}} + \frac{1}{2} \cdot \int_0^{\sqrt{3}} \frac{x^2}{x^2+1} dx = \frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2} \cdot \int_0^{\sqrt{3}} 1 - \frac{1}{x^2+1} dx = \\ &= \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \left(x - \operatorname{arctg} x \Big|_{x=0}^{\sqrt{3}} \right) = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \left(\sqrt{3} - \frac{\pi}{3} \right) = \frac{\pi}{4} + \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{12} + \frac{\sqrt{3}}{2}. \end{aligned}$$

Odpowiedź: Wartość podanej całki jest równa $\sqrt{3} + \frac{\pi}{6}$.

Jak to rozwiązać ???

Obliczyć wartość takiej sumy:

$$\sin 37^\circ + \sin 157^\circ + \sin 277^\circ.$$

I takiej:

$$\sin 37^\circ + \sin 109^\circ + \sin 181^\circ + \sin 253^\circ + \sin 325^\circ.$$

I może jeszcze pochodną rzędu 2020 funkcji⁴ $\sin^3$.

I przy okazji podać wzór na funkcję, której 2020-tą pochodną jest wyżej wspomniana funkcja $\sin^3$.

A jeśli znamy $\sin x$, to ile jest równe $\sin 7x$?

A ile to jest $\operatorname{arctg} 2 + \operatorname{arctg} 3$?

Nie musisz umieć rozwiązać żadnego z tych zadań⁵. Ale chyba zdajesz sobie sprawę, że kluczem do ich rozwiązania jest mistrzowskie opanowanie wszelakich tożsamości trygonometrycznych.

Cudownej, wprost niewiarygodnej umiejętności tworzenia na zawołanie potrzebnych tożsamości trygonometrycznych nauczysz się jutro. Ale najpierw musisz sobie przypominąć, co wiesz o liczbach zespolonych. Pomocne będzie odświeżenie wiadomości na ten temat poprzez zerknięcie do piątego rozdziału skryptu dr.⁶ Tomasza Elsnera z Algebry Liniowej 1 (jest na stronie autora).

Dla treningu rozwiąż też poniższe⁷ dwa zadania.

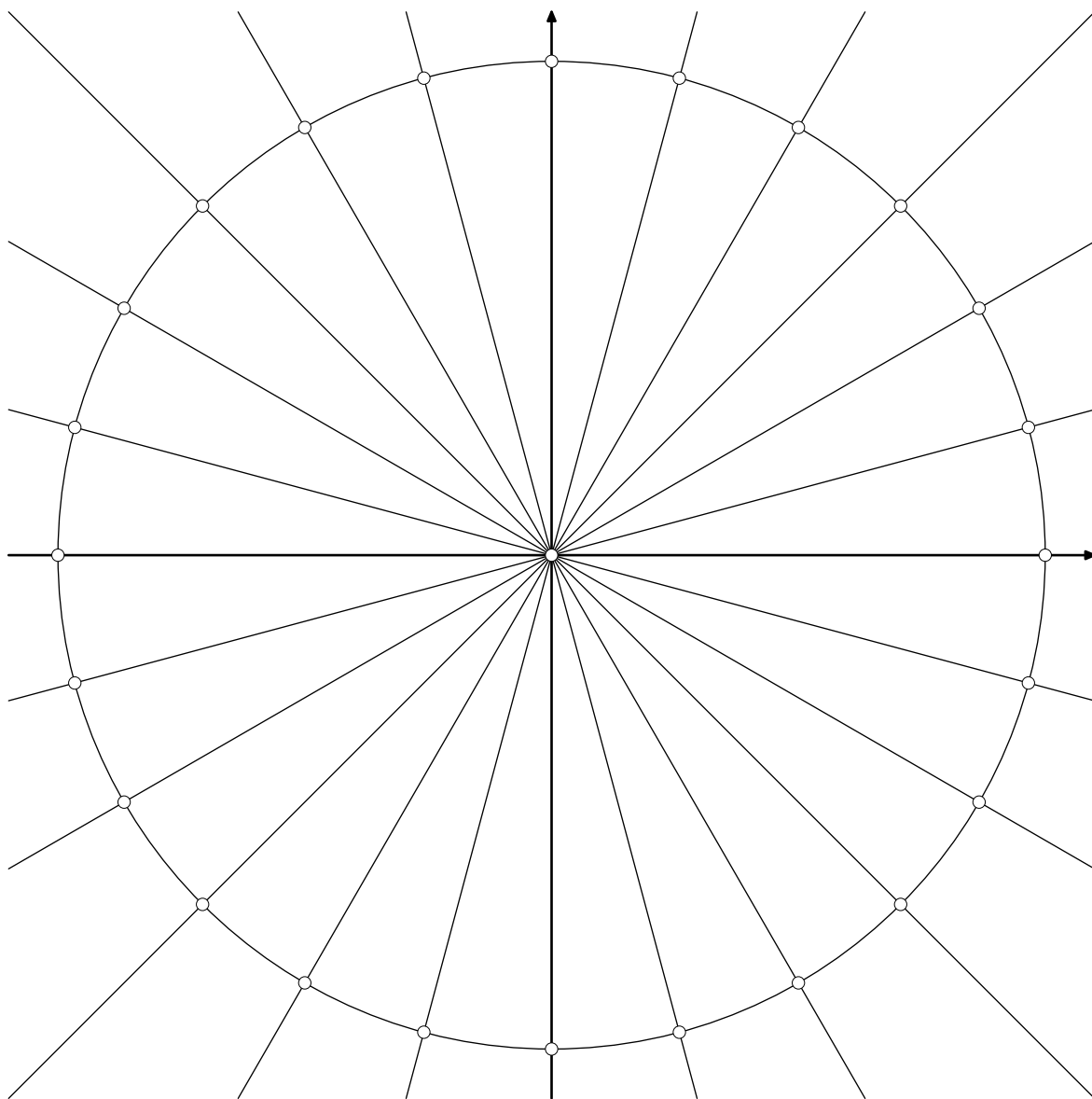
⁴Czyli funkcji f określonej wzorem $f(x) = \sin^3 x$.

⁵Rozwiązania oparte o żmudne rachunki lub polegające na wygrzebaniu z tablic lub internetu gotowych wzorków niepecjalnie nas interesują.

⁶Czy po "dr" stawiamy kropkę?

⁷Taka już jest tradycja, żeby pisać "poniższe" nawet o czymś, co jest na kolejnej stronie.

274. Wyznaczyć wszystkie rozwiązania równania $z^3 = i$ w liczbach zespolonych. Zapisać wszystkie rozwiązania w postaci kartezjańskiej (bez używania funkcji trygonometrycznych) oraz zaznaczyć wszystkie rozwiązania na płaszczyźnie zespolonej wykorzystując zamieszczony niżej rysunek, na którym narysowano okrąg jednostkowy oraz proste przechodzące przez punkt 0, co 15° .



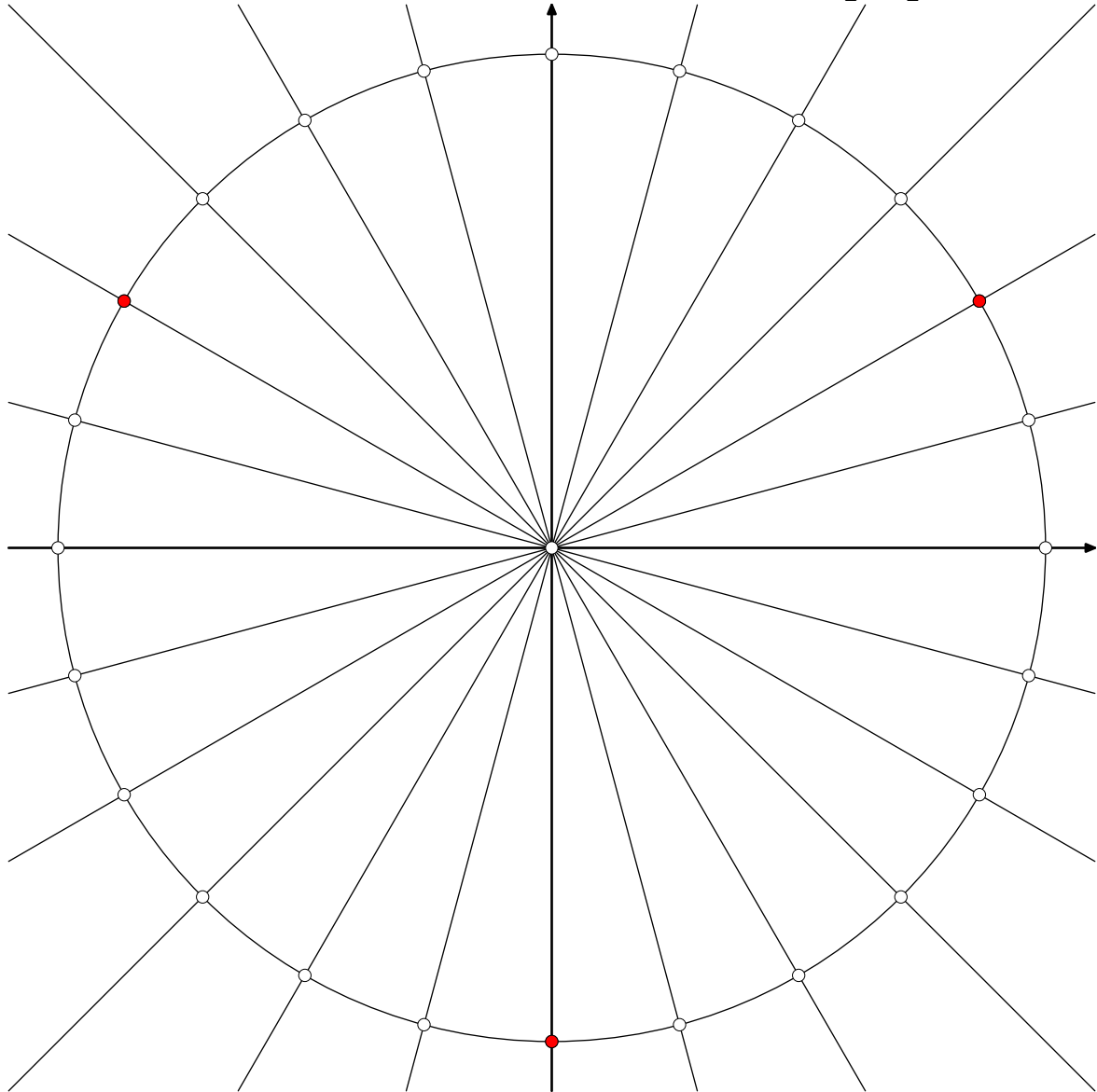
Zanim zajrzysz na kolejną stronę, rozwiąż powyższe zadanie, a przynajmniej podejmij próbę rozwiązania, aby wiedzieć, gdzie napotykasz trudności.

Rozwiązanie:

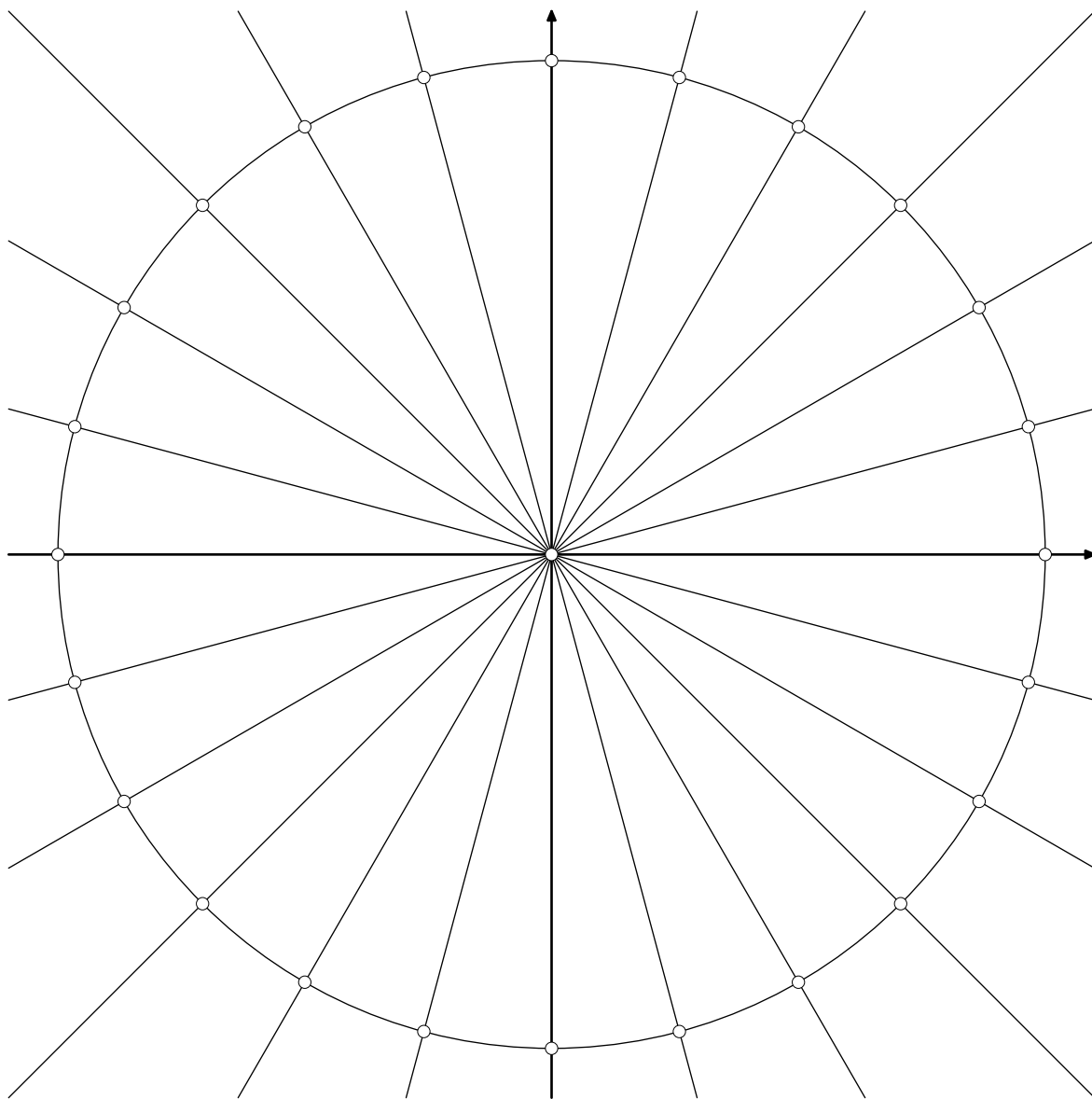
Dane w zadaniu równanie jest spełnione przez liczbę $z = -i$, a pozostałe dwa rozwiązania tego równania leżą na okręgu jednostkowym co 120° .

Inaczej: liczba i ma moduł 1 i argument $\pi/2$, a zatem jej pierwiastki sześciennie mają moduł 1 i argumenty $\pi/6 + 2k\pi/3$ dla $k = 0, 1, 2$, czyli odpowiednio $\pi/6, 5\pi/6, 3\pi/2$.

Odpowiedź: Dane równanie ma 3 rozwiązania: $-i$ oraz $\pm \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}$.



275. Wyznaczyć wszystkie rozwiązania równania $z^{27} + z^{16} = z^{24} + z^{19}$ w liczbach zespolonych. Podać liczbę rozwiązań, zapisać wszystkie rozwiązania w postaci kartezjańskiej (można używać znaków " $\pm$ " i " $\pm_2$ " dla zapisania kilku rozwiązań jednym wzorem) oraz zaznaczyć wszystkie rozwiązania na płaszczyźnie zespolonej wykorzystując zamieszczony niżej rysunek, na którym narysowano okrąg jednostkowy oraz proste przechodzące przez punkt 0, co 15° .



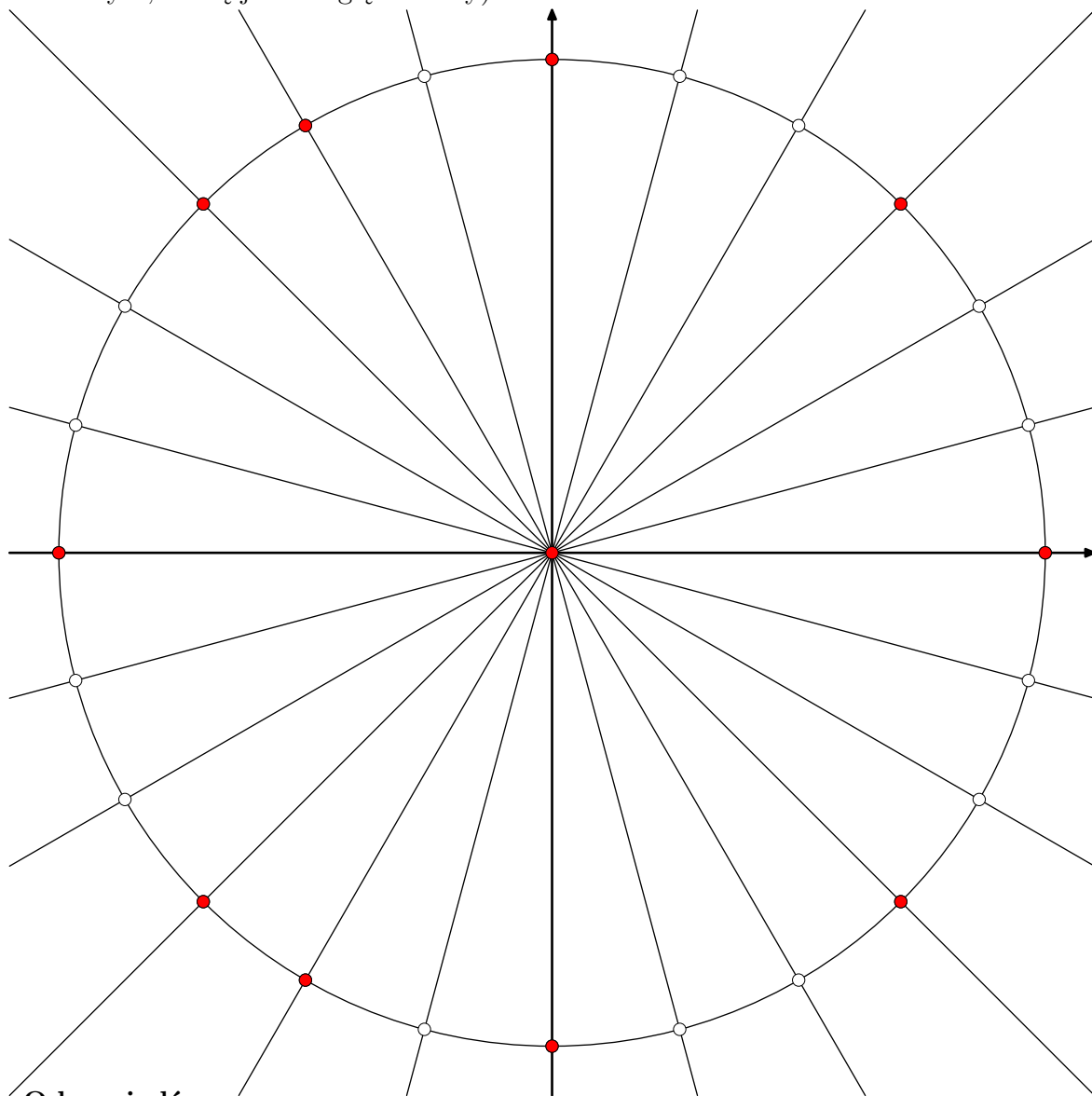
Zanim zajrzysz na kolejną stronę, rozwiąż powyższe zadanie, a przynajmniej podejmij próbę rozwiązania, aby wiedzieć, gdzie napotykasz trudności.

Rozwiązanie:

Przekształcając dane równanie otrzymujemy kolejno:

$$\begin{aligned} z^{27} - z^{24} - z^{19} + z^{16} &= 0, \\ (z^3 - 1) \cdot z^{24} - (z^3 - 1) \cdot z^{16} &= 0, \\ (z^3 - 1) \cdot (z^{24} - z^{16}) &= 0, \\ (z^3 - 1) \cdot (z^8 - 1) \cdot z^{16} &= 0, \\ z^3 = 1 \quad \vee \quad z^8 = 1 \quad \vee \quad z = 0. \end{aligned}$$

Zatem dane równanie ma 11 rozwiązań i są to: liczba 0, osiem pierwiastków ósmego stopnia z jedności (w tym liczba 1) oraz dwa pierwiastki trzeciego stopnia z jedności (bez liczby 1, którą już uwzględniliśmy).



Odpowiedź:

Dane równanie ma 11 rozwiązań: $0, \pm 1, \pm i, \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \pm \frac{\sqrt{2}}{2}i$ oraz $-\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$.