Dzień 18 (środa 8 kwietnia 2020)

Władca Sinusów

The Lord of the Sines

Zgodnie z wczorajszą obietnicą posiądziesz dziś cudowną umiejętność tworzenia na zawołanie potrzebnych tożsamości trygonometrycznych.

W skrypcie dr. Elsnera na dole strony 144 znajduje się **Fakt 5.9**, z którego jako wniosek wyciągnę następujące wzorki pozwalające zapanować nad dużą częścią świata tożsamości trygonometrycznych:

Dla danej liczby rzeczywistej x przyjmijmy[1]

$$z=\cos x+i\sin x\,.$$

Wówczas

$$z^{-1}=\cos x-i\sin x\,,$$

a ponadto dla każdej liczby naturalnej[2] n mają miejsce następujące równości[3]:

$$z^n=\cos nx+i\sin nx, \qquad z^{-n}=\cos nx-i\sin nx\,,$$

$$\cos nx=\mathrm{Re}z^n=\frac{z^n+z^{-n}}{2}, \qquad \sin nx=\mathrm{Im}z^n=\frac{z^n-z^{-n}}{2i}\,.$$

Jak wielka moc tkwi w powyższych niepozornych wzorach, przekonamy się na przykładach.

Przykład 1: Jeśli znamy $\sin x$, to ile jest równe $\sin 7x$?

Zanim zajrzysz na kolejną stronę, pomyśl nad powyższym przykładem.

---

[1] Po prostu liczba z ma moduł 1 i argument x.

[2] Dla ujemnych całkowitych n też jest to prawdą, ale tego nie potrzebuję, więc po co niepotrzebnie komplikować.

[3] Jakby kto nie wiedział, to Re oraz Im oznaczają odpowiednio część rzeczywistą i część urojoną liczby zespolonej, a mianowicie $\mathrm{Re}(a+bi)=a$ oraz $\mathrm{Im}(a+bi)=b$. Ponadto $\mathrm{Re}z^n$ należy interpretować jako $\mathrm{Re}(z^n)$.

Przy okazji wspaniała wiadomość dla wszystkich, którzy mają zwyczaj pisać niezbyt starannie: Jeśli ktoś bazgroli tak, że nie da się odróżnić z^{-n} od $\overline{z}^n$, to akurat w przypadku liczby z o module 1 może sobie na taką niestaranność zapisu pozwolić:

$$(\overline{z})^n=\overline{z}^n=\overline{z}^n=\overline{z}^{\,n}=\overline{z}^{\,n}=\overline{z}^{\,n}=z^{-n}=z^{-n}=z^{-n}=z^{-n}=z^{-n}=z^{-n}=\frac{1}{z^n}$$

Ktoś pamięta wzór na sinus siedmiokrotności kąta? Nie? Nie uczyli tego w szkole? Trudno. Zaraz sobie taki wzór wyprowadzimy. Dla liczby x wprowadzamy z jak na poprzedniej stronie. Wówczas

$$\sin 7x = \operatorname{Im} z^7 = \operatorname{Im}(\cos x + i\sin x)^7 =$$
$$= \operatorname{Im}\left(\cos^7 x + 7i\cos^6 x\sin x - 21\cos^5 x\sin^2 x - 35i\cos^4 x\sin^3 x + \right.$$
$$\left. +35\cos^3 x\sin^4 x + 21i\cos^2 x\sin^5 x - 7\cos x\sin^6 x - i\sin^7 x\right) =$$
$$= 7\cos^6 x\sin x - 35\cos^4 x\sin^3 x + 21\cos^2 x\sin^5 x - \sin^7 x\,.$$

W zasadzie po pierwszej linijce powyższego wzoru można było od razu napisać ostatnią. Nie ma bowiem potrzeby wypisywania całego rozwinięcia siódmej potęgi dwumianu, jeśli z góry wiemy, które składniki wejdą w skład ostatecznego wyniku, a które znikną przy braniu części urojonej.

Skoro chcemy wyrazić $\sin 7x$ przez $\sin x$, to trzeba się jeszcze pozbyć z uzyskanego wzoru kosinusa. Wykorzystujemy do tego celu równość

$$\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$$

i otrzymujemy

$$\sin 7x = 7\cos^6 x\sin x - 35\cos^4 x\sin^3 x + 21\cos^2 x\sin^5 x - \sin^7 x =$$
$$= 7\left(1-\sin^2 x\right)^3\sin x - 35\left(1-\sin^2 x\right)^2\sin^3 x + 21\left(1-\sin^2 x\right)\sin^5 x - \sin^7 x =$$
$$= 7\left(1 - 3\sin^2 x + 3\sin^4 x - \sin^6 x\right)\sin x -$$
$$-35\left(1 - 2\sin^2 x + \sin^4 x\right)\sin^3 x + 21\left(1-\sin^2 x\right)\sin^5 x - \sin^7 x =$$
$$= 7\sin x - 56\sin^3 x + 112\sin^5 x - 64\sin^7 x\,.$$

Zwracam uwagę, że w uzyskanej tożsamości nie ma ani śladu liczb zespolonych. Liczby zespolone posłużyły nam tylko do wyprowadzenia wzoru, ale nie mają prawa pojawić się w uzyskanej odpowiedzi.

Przykład 2: Niech f będzie funkcją określoną wzorem $f(x) = \sin^3 x$.
Podać wzór na $f^{(2020)}$.
Podać taką funkcję F, że $F^{(2020)} = f$.

Zanim zajrzysz na kolejną stronę, pomyśl nad powyższym przykładem.

Cały problem ze sprawnym różniczkowaniem, a jeszcze większy z całkowaniem, polega na tym, że we wzorze definiującym funkcję f sinusy są przez siebie mnożone. Jakiś koszmarny wzór na pochodną wysokiego rzędu iloczynu trzech czynników jeszcze można sobie wyobrazić, ale uniwersalnego wzoru gwarantujacego całkowanie iloczynu nie mamy. Tak więc boli nas to, że sinus występuje w trzeciej potędze. Natomiast z punktu widzenia całkowania czy różniczkowania jest nam kompletnie obojętne, czy w argumencie sinusa jest goły x, czy też jakaś wielokrotność x-a. Przydałaby nam się tożsamość idąca w kierunku przeciwnym niż w przykładzie 1. Tam chcieliśmy wyrazić $\sin 7x$ przez $\sin x$. I w tym wyrażeniu pojawiały się różne potęgi sinusa. Tu zależy nam na wyrażeniu $\sin^3 x$ przez sinusy i ewentualnie kosinusy, nieważne jaką wielokrotność x-a będą miały w argumencie, **byle nie były przez siebie mnożone.**

No to zaczynamy. Jak zwykle definiujemy $z = \cos x + i \sin x$ i pamiętamy o wzorach ze strony 154. Wobec tego

$$\sin^3 x = (\mathrm{Im} z)^3 = ???$$

Niestety, nie tędy droga. Wzorki z Re oraz Im nie nadają się do sytuacji, gdy sinusy i kosinusy są przez siebie mnożone, bo nie jesteśmy w stanie wyrazić w prosty sposób iloczynu części urojonych. Na tę właśnie okoliczność mamy drugą wersję, czysto algebraiczną, wyrażenia $\sin x$ przez z. Spokojnie, teraz się uda:

$$\sin^3 x = \left(\frac{z-z^{-1}}{2i}\right)^3 = \frac{z^3-3z+3z^{-1}-z^{-3}}{-8i} = \frac{z^3-z^{-3}}{-4\cdot 2i} - \frac{3z-3z^{-1}}{-4\cdot 2i} =$$
$$= -\frac{1}{4}\cdot\frac{z^3-z^{-3}}{2i} + \frac{3}{4}\cdot\frac{z-z^{-1}}{2i} = \frac{-\sin 3x + 3\sin x}{4}\,.$$

Otrzymaliśmy więc następujący wzór na sześcian sinusa (nie znaliście go wcześniej?):

$$\sin^3 x = \frac{-\sin 3x + 3\sin x}{4}\,.$$

Wobec tego

$$f(x) = \frac{-\sin 3x + 3\sin x}{4}\,.$$

Funkcję f zapisaną w tej postaci bez problemu różniczkujemy[4]:

$$f^{(2020)}(x) = \frac{-3^{2020}\cdot\sin 3x + 3\sin x}{4}\,.$$

I bez problemu wypisujemy wzór na funkcję F:

$$F(x) = \frac{-3^{-2020}\cdot\sin 3x + 3\sin x}{4} + W_{2019}(x)\,.$$

W powyższym wzorze $W_{2019}(x)$ jest dowolnym wielomianem stopnia co najwyżej 2019.

Przykład 3: Obliczyć wartość sumy:

$$\sin 37^\circ + \sin 157^\circ + \sin 277^\circ\,.$$

Zanim zajrzysz na kolejną stronę, pomyśl nad powyższym przykładem.

[4]Korzystając dodatkowo z tego, że akurat mamy rok przestępny, więc daleka pochodna sinusa jest sinusem.

Podana suma ma postać

$$\sin\alpha+\sin(\alpha+120^\circ)+\sin(\alpha+240^\circ)\,,$$

co w notacji używanej na analizie (argumenty w radianach) możemy przepisać jako

$$\sin x+\sin\left(x+\frac{2\pi}{3}\right)+\sin\left(x+\frac{4\pi}{3}\right).$$

Okazuje się[5], że taka suma zawsze jest równa 0. Bez trudu wykażemy to korzystając z liczb zespolonych.

Niech jak zwykle $z=\cos x+i\sin x$, a ponadto niech $\xi=\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}$ będzie zespolonym pierwiastkiem sześciennym z jedności.

Wówczas[6]

$$\sin x=\operatorname{Im} z\,,$$

$$\sin\left(x+\frac{2\pi}{3}\right)=\operatorname{Im}(z\xi)\,,$$

$$\sin\left(x+\frac{4\pi}{3}\right)=\operatorname{Im}\left(z\xi^2\right)\,,$$

skąd

$$\sin x+\sin\left(x+\frac{2\pi}{3}\right)+\sin\left(x+\frac{4\pi}{3}\right)=\operatorname{Im}\left(z\left(1+\xi+\xi^2\right)\right)\,,$$

co jest równe 0 ze względu na równość[7]

$$1+\xi+\xi^2=0\,.$$

W analogiczny sposób[8] dowodzimy ogólnej równości

$$\sin x+\sin\left(x+\frac{2\pi}{5}\right)+\sin\left(x+\frac{4\pi}{5}\right)+\sin\left(x+\frac{6\pi}{5}\right)+\sin\left(x+\frac{8\pi}{5}\right)=0\,,$$

która w szczególnym przypadku daje

$$\sin 37^\circ+\sin 109^\circ+\sin 181^\circ+\sin 253^\circ+\sin 325^\circ=0\,.$$

Przykład 4: Obliczyć wartość całki oznaczonej

$$\int_{-3}^{2}\frac{dx}{x^2+1}\,.$$

Najtrudniejsza część zadania: uprościć wynik !!!
Pomyśl do jutra nad powyższym przykładem.

---

[5]Tylko nie mówcie, że nigdy nie widzieliście równości

$$\sin x+\sin\left(x+\frac{2\pi}{3}\right)+\sin\left(x+\frac{4\pi}{3}\right)=0\,.$$

Ta równość jest widoczna na słupach wysokiego napięcia, gdzie (mówiąc w uproszczeniu) mamy napięcie trójfazowe. Przewody idą w paczkach po cztery, z tego trzy grube i jeden cienki. Grube przewody odpowiadają za poszczególne fazy (sinusy w powyższej sumie), a czwarty jest neutralny – mówiąc w bardzo naiwnym uproszczeniu odpowiada on za sumę trzech sinusów, czyli zero, a w praktyce drobne szumy.

[6]Liczby z i ξ mają moduł 1, a przy mnożeniu liczb zespolonych ich argumenty się dodają.

[7]Suma trzech pierwiastków z jedności jest równa 0 – zob. skrypt dr. Elsnera str. 147, Fakt 5.11.

[8]Zamiast pierwiastka sześciennego z jedności trzeba się posłużyć pierwiastkiem piątego stopnia.