

Dzień 19 (czwartek 9 kwietnia 2020)

Zacniemy od przykładu zaanonsowanego wczoraj.

Przykład 4: Obliczyć wartość całki oznaczonej

$$\int_{-3}^2 \frac{dx}{x^2+1}.$$

Samo całkowanie nie powinno sprawiać najmniejszych trudności:

$$\int_{-3}^2 \frac{dx}{x^2+1} = \operatorname{arctg} \Big|_{x=-3}^2 = \operatorname{arctg} 2 - \operatorname{arctg}(-3) = \operatorname{arctg} 2 + \operatorname{arctg} 3.$$

I teraz dochodzimy do sedna sprawy: Czy i jak można uprościć uzyskany wynik? W tym celu trzeba byłoby umieć powiązać arcusa tangensa z liczbami zespolonymi.

Otóż¹

$$\operatorname{arctg} x = \arg(1 + xi),$$

czyli $\operatorname{arctg} x$ jest argumentem liczby zespolonej $1 + xi$, jeśli przyjmiemy dodatkową umowę, że w tym wypadku argument ten pochodzi z przedziału $(-\pi/2, \pi/2)$.

Ogólniejszy wzór ma postać

$$\operatorname{arctg} \frac{b}{a} = \arg(a + bi)$$

i wymaga założenia $a > 0$ oraz przyjęcia, że argument należy do przedziału $(-\pi/2, \pi/2)$.

W interesującym nas przykładzie

$$\operatorname{arctg} 2 + \operatorname{arctg} 3 = \arg(1 + 2i) + \arg(1 + 3i) = \arg((1 + 2i) \cdot (1 + 3i)) = \arg(-5 + 5i) = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi.$$

To jeszcze nie koniec, bo argument liczby zespolonej nie jest jednoznaczny, znamy go z dokładnością do wielokrotności 2π .

Jednak dodanie nierówności

$$\frac{\pi}{4} < \operatorname{arctg} 2 < \frac{\pi}{2}$$

oraz

$$\frac{\pi}{4} < \operatorname{arctg} 3 < \frac{\pi}{2}$$

daje

$$\frac{\pi}{2} < \operatorname{arctg} 2 + \operatorname{arctg} 3 < \pi,$$

skąd

$$\operatorname{arctg} 2 + \operatorname{arctg} 3 = \frac{3\pi}{4}.$$

276. Obliczyć wartość całki $\int_0^\pi \sin^5 x \, dx$.

Zanim zajrzysz na kolejną stronę, rozwiąż powyższe zadanie, a przynajmniej podejmij próbę rozwiązania, aby wiedzieć, gdzie napotkasz trudności.

¹Zobacz skrypt dr. Elsnera, str. 142 Fakt 5.5 oraz rysunek na górze strony 143.

Rozwiązanie:

Sposób I

Użyjemy liczb zespolonych do wyprowadzenia odpowiedniej tożsamości trygonometrycznej.

Przyjmijmy

$$z = \cos x + i \sin x,$$

co daje

$$z^n = \cos nx + i \sin nx, \quad z^{-n} = \cos nx - i \sin nx, \quad \sin nx = \frac{z^n - z^{-n}}{2i}.$$

Przy tych oznaczeniach otrzymujemy:

$$\begin{aligned} \sin^5 x &= \left(\frac{z - z^{-1}}{2i} \right)^5 = \frac{z^5 - 5z^3 + 10z - 10z^{-1} + 5z^{-3} - z^{-5}}{32i} = \\ &= \frac{\sin 5x}{16} - \frac{5 \sin 3x}{16} + \frac{5 \sin x}{8}. \end{aligned}$$

Teraz możemy obliczyć daną w zadaniu całkę:

$$\begin{aligned} \int_0^\pi \sin^5 x \, dx &= \int_0^\pi \left(\frac{\sin 5x}{16} - \frac{5 \sin 3x}{16} + \frac{5 \sin x}{8} \right) dx = \left. -\frac{\cos 5x}{80} + \frac{5 \cos 3x}{48} - \frac{5 \cos x}{8} \right|_{x=0}^\pi = \\ &= -\frac{\cos 5\pi}{80} + \frac{5 \cos 3\pi}{48} - \frac{5 \cos \pi}{8} + \frac{\cos 0}{80} - \frac{5 \cos 0}{48} + \frac{5 \cos 0}{8} = \frac{1}{80} - \frac{5}{48} + \frac{5}{8} + \frac{1}{80} - \frac{5}{48} + \frac{5}{8} = \\ &= \frac{1}{40} - \frac{5}{24} + \frac{5}{4} = \frac{3 - 25 + 150}{120} = \frac{128}{120} = \frac{16}{15}. \end{aligned}$$

Odpowiedź: Podana całka ma wartość $16/15$.

Sposób II

Podstawienie $t = \cos x$ i formalnie $dt = -\sin x \, dx$ prowadzi do

$$\begin{aligned} \int_0^\pi \sin^5 x \, dx &= - \int_1^{-1} (1 - t^2)^2 \, dt = \int_{-1}^1 t^4 - 2t^2 + 1 \, dt = 2 \cdot \int_0^1 t^4 - 2t^2 + 1 \, dt = \\ &= 2 \cdot \left(\frac{t^5}{5} - \frac{2t^3}{3} + t \right) \Big|_{t=0}^1 = 2 \cdot \left(\frac{1}{5} - \frac{2}{3} + 1 \right) = 2 \cdot \frac{3 - 10 + 15}{15} = 2 \cdot \frac{8}{15} = \frac{16}{15}. \end{aligned}$$

277. Wyznaczyć taką liczbę wymierną $a < 5$, że $\int_a^5 \frac{dx}{x^2 + 1} = \frac{\pi}{4}$.

Zanim zajrzysz na kolejną stronę, rozwiąż powyższe zadanie, a przynajmniej podejmij próbę rozwiązania, aby wiedzieć, gdzie napotykasz trudności.

Rozwiązanie:

Ponieważ

$$\int_a^5 \frac{dx}{x^2+1} = \operatorname{arctg} x \Big|_{x=a}^5 = \operatorname{arctg} 5 - \operatorname{arctg} a ,$$

pozostaje znaleźć liczbę a spełniającą równanie

$$\operatorname{arctg} 5 - \operatorname{arctg} a = \frac{\pi}{4} = \operatorname{arctg} 1 ,$$

czyli

$$\operatorname{arctg} a = \operatorname{arctg} 5 - \operatorname{arctg} 1 .$$

Ponieważ $\operatorname{arctg} t$ jest argumentem liczby zespolonej $1+ti$, otrzymujemy

$$\begin{aligned} \operatorname{arctg} a &= \operatorname{arctg} 5 - \operatorname{arctg} 1 = \operatorname{arctg} 5 + \operatorname{arctg}(-1) = \arg(1+5i) + \arg(1-i) = \\ &= \arg((1+5i) \cdot (1-i)) + 2k\pi = \arg(6+4i) + 2k\pi = \arg\left(1 + \frac{2}{3}i\right) + 2k\pi = \operatorname{arctg} \frac{2}{3} + 2k\pi , \end{aligned}$$

skąd po uwzględnieniu nierówności

$$-\frac{\pi}{2} < \operatorname{arctg} \frac{2}{3} < \frac{\pi}{2}$$

i

$$0 < \operatorname{arctg} 5 - \operatorname{arctg} 1 < \frac{\pi}{2}$$

wynika $k=0$ oraz $a=2/3$.

Odpowiedź: Warunki zadania spełnia liczba $a=2/3$.