

Dzień 20 (środa 15 kwietnia 2020)

Szeregi liczbowe – obliczanie sumy z definicji.

Zajmiemy się teraz szeregami liczbowymi. Temat ten dosłownie liźnęliśmy w pierwszym semestrze, a teraz zajmiemy się nim na poważnie. Najpierw jednak przypomnijmy sobie to, co już powinniśmy wiedzieć i przećwiczmy to na prostych zadankach.

Na początek przypomnijmy, że przez szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ rozumiemy ciąg sum częściowych $(S_N)_{N \in \mathbb{N}}$, gdzie

$$S_N = \sum_{n=1}^N a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{N-1} + a_N.$$

Zbieżnością szeregu jest zbieżność ciągu jego sum częściowych, a jeśli istnieje granica (lub granica niewłaściwa $\pm\infty$) ciągu sum częściowych, to nazywamy ją sumą szeregu.

Przenoszą się przy tym odpowiednie własności związane z ciągami liczbowymi, a mianowicie:

- Jeśli szeregi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ oraz $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ są zbieżne, to zbieżny jest szereg $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ i przy tym

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n.$$

- Jeśli szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny, to dla każdej liczby rzeczywistej c zbieżny jest szereg $\sum_{n=1}^{\infty} ca_n$ i przy tym

$$\sum_{n=1}^{\infty} ca_n = c \cdot \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

Kryteria zbieżności szeregów (cz. I).

1. WARUNEK KONIECZNY ZBIEŻNOŚCI.

Jeżeli szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny, to $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

Innymi słowy, jeżeli ciąg (a_n) jest rozbieżny lub zbieżny do granicy różnej od zera, to szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest rozbieżny.

2. ZBIEŻNOŚĆ SZEREGU NIE ZALEŻY OD POMINIĘCIA LUB ZMIANY SKOŃCZENIE WIELU POCZĄTKOWYCH WYRAZÓW.

Oczywiście zmiana lub pominięcie tych wyrazów ma wpływ na sumę szeregu zbieżnego.

288. Szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny, jego suma jest równa 7, a jego pierwszy wyraz jest równy 2.

Udowodnić, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} (5^{a_n} - 5^{a_{n+1}})$ jest zbieżny i wyznaczyć jego sumę.

Zanim zajrzysz na kolejną stronę, rozwiąż powyższe zadanie, a przynajmniej podejmij próbę rozwiązania, aby wiedzieć, gdzie napotykasz trudności.

Rozwiązanie:

Ponieważ szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny, ciąg jego wyrazów (a_n) jest zbieżny do zera, a w konsekwencji

$$\lim_{n \rightarrow \infty} 5^{a_n} = 5^0 = 1.$$

Zauważmy, że sumy częściowe szeregu danego w tezie zadania dają się zapisać następującym wzorem:

$$S_N = \sum_{n=1}^N (5^{a_n} - 5^{a_{n+1}}) = 5^{a_1} - 5^{a_{N+1}} = 5^2 - 5^{a_{N+1}} = 25 - 5^{a_{N+1}}.$$

Wobec tego

$$\sum_{n=1}^{\infty} (5^{a_n} - 5^{a_{n+1}}) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N (5^{a_n} - 5^{a_{n+1}}) = \lim_{N \rightarrow \infty} (25 - 5^{a_{N+1}}) = 25 - 1 = 24.$$

Odpowiedź: Szereg dany w tezie zadania ma sumę 24.

Uwaga: Informacja o sumie szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbędna – powodem jej umieszczenia są względy pozamatematyczne¹.

289. Obliczyć sumę szeregu

$$\sum_{n=2}^{\infty} \left(\sqrt{1 + \frac{16}{n^2 - n}} - \sqrt{1 + \frac{16}{n^2 + n}} \right).$$

Zapisać wynik w postaci liczby całkowitej lub ułamka nieskracalnego.

Zanim zajrzysz na kolejną stronę, rozwiąż powyższe zadanie, a przynajmniej podejmij próbę rozwiązania, aby wiedzieć, gdzie napotkasz trudności.

¹Czyli dla zmyłki.

Rozwiązanie:

Zapisując dany szereg w postaci

$$\sum_{n=2}^{\infty} \left(\sqrt{1 + \frac{16}{(n-1) \cdot n}} - \sqrt{1 + \frac{16}{n \cdot (n+1)}} \right)$$

zauważamy, że odjemnik różnicy występującej w wyrazie szeregu jest odjemną różnicy występującej w wyrazie następnym.

Możemy więc przekształcić N -tą sumę częściową danego szeregu:

$$\begin{aligned} S_N &= \sum_{n=2}^N \left(\sqrt{1 + \frac{16}{(n-1) \cdot n}} - \sqrt{1 + \frac{16}{n \cdot (n+1)}} \right) = \\ &= \left(\sqrt{1 + \frac{16}{1 \cdot 2}} - \sqrt{1 + \frac{16}{2 \cdot 3}} \right) + \left(\sqrt{1 + \frac{16}{2 \cdot 3}} - \sqrt{1 + \frac{16}{3 \cdot 4}} \right) + \left(\sqrt{1 + \frac{16}{3 \cdot 4}} - \sqrt{1 + \frac{16}{4 \cdot 5}} \right) + \dots \\ &\quad \dots + \left(\sqrt{1 + \frac{16}{(N-3) \cdot (N-2)}} - \sqrt{1 + \frac{16}{(N-2) \cdot (N-1)}} \right) + \\ &\quad + \left(\sqrt{1 + \frac{16}{(N-2) \cdot (N-1)}} - \sqrt{1 + \frac{16}{(N-1) \cdot N}} \right) + \\ &\quad + \left(\sqrt{1 + \frac{16}{(N-1) \cdot N}} - \sqrt{1 + \frac{16}{N \cdot (N+1)}} \right) = \\ &= \sqrt{1 + \frac{16}{1 \cdot 2}} - \sqrt{1 + \frac{16}{N \cdot (N+1)}} = 3 - \sqrt{1 + \frac{16}{N \cdot (N+1)}}, \end{aligned}$$

co przy N dążącym do $+\infty$ zbiega do $3 - 1 = 2$.

Odpowiedź: Dany w zadaniu szereg ma sumę równą 2.

290. Obliczyć sumę szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\sqrt{n^2 - n + 1}}{2n - 1} - \frac{\sqrt{n^2 + n + 1}}{2n + 1} \right)$.

Zanim zajrzysz na kolejną stronę, rozwiąż powyższe zadanie, a przynajmniej podejmij próbę rozwiązania, aby wiedzieć, gdzie napotykasz trudności.

Rozwiązanie:

Niech

$$a_n = \frac{\sqrt{n^2 - n + 1}}{2n - 1} = \frac{\sqrt{(n-1) \cdot n + 1}}{2n - 1}.$$

Wówczas

$$\frac{\sqrt{n^2 + n + 1}}{2n + 1} = \frac{\sqrt{n \cdot (n+1) + 1}}{2(n+1) - 1} = a_{n+1},$$

a ponadto

$$a_1 = 1 \quad \text{oraz} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{1}{2}.$$

Zatem sumy częściowe szeregu danego w treści zadania można zapisać następującym wzorem:

$$S_N = \sum_{n=1}^N (a_n - a_{n+1}) =$$

$$= (a_1 - a_2) + (a_2 - a_3) + (a_3 - a_4) + \dots + (a_{N-1} - a_N) + (a_N - a_{N+1}) = a_1 - a_{N+1}.$$

Wobec tego

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - a_{n+1}) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N (a_n - a_{n+1}) = \lim_{N \rightarrow \infty} (a_1 - a_{N+1}) = a_1 - \lim_{N \rightarrow \infty} a_{N+1} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Odpowiedź: Szereg dany w treści zadania ma sumę $1/2$.

291. Niech $a_n = \frac{n+3}{n+1}$ dla $n \in \mathbb{N}$.

Udowodnić, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} (2^{2^{a_n}} - 2^{2^{a_{n+1}}})$ jest zbieżny i wyznaczyć jego sumę.

Zanim zajrzysz na kolejną stronę, rozwiąż powyższe zadanie, a przynajmniej podejmij próbę rozwiązania, aby wiedzieć, gdzie napotykasz trudności.

Rozwiązanie:

Odnajdujemy najpierw, że $a_1 = 2$ oraz $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$.

Zauważmy, że sumy częściowe szeregu danego w tezie zadania dają się zapisać następującym wzorem:

$$S_N = \sum_{n=1}^N (2^{2^{a_n}} - 2^{2^{a_{n+1}}}) = 2^{2^{a_1}} - 2^{2^{a_{N+1}}} = 2^{2^1} - 2^{2^{a_{N+1}}} = 16 - 2^{2^{a_{N+1}}}.$$

Wobec tego

$$\sum_{n=1}^{\infty} (2^{2^{a_n}} - 2^{2^{a_{n+1}}}) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N (2^{2^{a_n}} - 2^{2^{a_{n+1}}}) = \lim_{N \rightarrow \infty} (16 - 2^{2^{a_{N+1}}}) = 16 - 2^{2^1} = 16 - 4 = 12.$$

Odpowiedź: Szereg dany w treści zadania ma sumę 12.

292. W każdym z zadań **292.1-292.12** podaj sumę szeregu w postaci **liczby całkowitej**.

W zadaniach **292.0** i **292.00** podane są poprawne odpowiedzi – możesz sobie rozwiązać te zadania, aby sprawdzić, czy nie popełniasz jakiegoś błędu rachunkowego.

Niech $a_n = \frac{8n - 4\sqrt{3n-2} - 1}{\sqrt{16n^2 - 15}}$. Wówczas:

292.0. $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - a_{n+1}) = 1$	292.00. $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - a_{n+2}) = 0$
292.1. $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 - a_{n+1}^2) = \dots\dots\dots$	292.2. $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 - a_{n+2}^2) = \dots\dots\dots$
292.3. $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n^3 - a_{n+1}^3) = \dots\dots\dots$	292.4. $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n^3 - a_{n+2}^3) = \dots\dots\dots$
292.5. $\sum_{n=1}^{\infty} (2^{a_n} - 2^{a_{n+1}}) = \dots\dots\dots$	292.6. $\sum_{n=1}^{\infty} (2^{a_n} - 2^{a_{n+2}}) = \dots\dots\dots$
292.7. $\sum_{n=1}^{\infty} (3^{a_n} - 3^{a_{n+1}}) = \dots\dots\dots$	292.8. $\sum_{n=1}^{\infty} (3^{a_n} - 3^{a_{n+2}}) = \dots\dots\dots$
292.9. $\sum_{n=1}^{\infty} (4^{a_n} - 4^{a_{n+1}}) = \dots\dots\dots$	292.10. $\sum_{n=1}^{\infty} (4^{a_n} - 4^{a_{n+2}}) = \dots\dots\dots$
292.11. $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{24a_n - 23} - \sqrt{24a_{n+1} - 23}) = \dots\dots\dots$	
292.12. $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{24a_n - 23} - \sqrt{24a_{n+2} - 23}) = \dots\dots\dots$	

Zanim zajrzysz na kolejną stronę, rozwiąż powyższe zadanie, a przynajmniej podejmij próbę rozwiązania, aby wiedzieć, gdzie napotykasz trudności.

$$\mathbf{292.1.} \quad \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 - a_{n+1}^2) = \mathbf{5}$$

$$\mathbf{292.2.} \quad \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 - a_{n+2}^2) = \mathbf{2}$$

$$\mathbf{292.3.} \quad \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^3 - a_{n+1}^3) = \mathbf{19}$$

$$\mathbf{292.4.} \quad \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^3 - a_{n+2}^3) = \mathbf{12}$$

$$\mathbf{292.5.} \quad \sum_{n=1}^{\infty} (2^{a_n} - 2^{a_{n+1}}) = \mathbf{4}$$

$$\mathbf{292.6.} \quad \sum_{n=1}^{\infty} (2^{a_n} - 2^{a_{n+2}}) = \mathbf{2}$$

$$\mathbf{292.7.} \quad \sum_{n=1}^{\infty} (3^{a_n} - 3^{a_{n+1}}) = \mathbf{18}$$

$$\mathbf{292.8.} \quad \sum_{n=1}^{\infty} (3^{a_n} - 3^{a_{n+2}}) = \mathbf{12}$$

$$\mathbf{292.9.} \quad \sum_{n=1}^{\infty} (4^{a_n} - 4^{a_{n+1}}) = \mathbf{48}$$

$$\mathbf{292.10.} \quad \sum_{n=1}^{\infty} (4^{a_n} - 4^{a_{n+2}}) = \mathbf{36}$$

$$\mathbf{292.11.} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{24a_n - 23} - \sqrt{24a_{n+1} - 23} \right) = \mathbf{2}$$

$$\mathbf{292.12.} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{24a_n - 23} - \sqrt{24a_{n+2} - 23} \right) = \mathbf{-2}$$
