

## Dzień 21 (czwartek 16 kwietnia 2020)

### Szeregi liczbowe – kryterium porównawcze.

Dziś dalszy ciąg przypomnienia tego, co było w pierwszym semestrze, a mianowicie kryterium porównawcze. Troszkę na ten temat było już wspomniane 6 kwietnia przy okazji całek niewłaściwych i ich konfrontacji z szeregami.

W zasadzie dziś dostajecie tylko kilka zadań do odświeżenia i przećwiczenia stosowania kryterium porównawczego, ale jeszcze raz do znudzenia przypomnę bardzo ważny przykład:

**Szereg harmoniczny**

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots$$

jest rozbieżny. **Jest to przykład szeregu rozbieżnego, którego wyrazy dążą do zera.**

Przypominam też, że w przypadku szeregu o wyrazach nieujemnych możemy wyrazić fakt jego zbieżności lub rozbieżności bez słów – wystarczy porównać sumę szeregu z  $\infty$ . Suma ta bowiem zawsze<sup>1</sup> ma sens, a pytanie o zbieżność szeregu jest pytaniem o skończoność jego sumy.

### Kryteria zbieżności szeregów (cz. II).

#### 3. KRYTERIUM PORÓWNAWCZE.

Niech  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  i  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  będą szeregami o wyrazach nieujemnych, przy czym dla każdego  $n \in \mathbb{N}$  zachodzi nierówność  $a_n \leq b_n$ .

Jeżeli  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty$ , to  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \infty$ .

Jeżeli  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n < \infty$ , to  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$ .

#### 4. KILKA WZORCOWYCH SZEREGÓW.

$\sum_{n=1}^{\infty} q^n$  jest zbieżny dla  $|q| < 1$ , rozbieżny dla pozostałych  $q$ .

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^a}$  jest zbieżny dla  $a > 1$ , rozbieżny dla pozostałych  $a$ .

**293.** Wskazując odpowiednią liczbę wymierną dodatnią  $C$  udowodnić nierówności

$$C \cdot \pi^2 \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{4n^4 + 4n + 1}}{12n^4 + n^3 + 3} \leq 2C \cdot \pi^2.$$

Wolno skorzystać bez dowodu z równości  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ .

**Zanim zajrzysz na kolejną stronę, rozwiąż powyższe zadanie, a przynajmniej podejmij próbę rozwiązania, aby wiedzieć, gdzie napotykasz trudności.**

---

<sup>1</sup>To znaczy "zawsze w przypadku szeregu o wyrazach nieujemnych". Jeśli szereg ma wyrazy różnych znaków, to jego suma może nie mieć sensu.

*Rozwiązanie:*

Szacujemy dany w zadaniu szereg od dołu:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{4n^4+4n+1}}{12n^4+n^3+3} \geq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{4n^4+0+0}}{12n^4+n^4+3n^4} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2}{16n^4} = \frac{1}{8} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{8} \cdot \frac{\pi^2}{6} = \frac{1}{48} \cdot \pi^2$$

i od góry:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{4n^4+4n+1}}{12n^4+n^3+3} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{4n^4+4n^4+n^4}}{12n^4+0+0} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n^2}{12n^4} = \frac{1}{4} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{4} \cdot \frac{\pi^2}{6} = \frac{1}{24} \cdot \pi^2.$$

Wobec równości  $\frac{1}{24} = 2 \cdot \frac{1}{48}$  udowodniliśmy żądane nierówności ze stałą  $C = \frac{1}{48}$ .

**294.** Rozstrzygnąć, czy szereg  $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n^{20}+n^8} - n^{10})$  jest zbieżny.

Zanim zajrzysz na kolejną stronę, rozwiąż powyższe zadanie, a przynajmniej podejmij próbę rozwiązania, aby wiedzieć, gdzie napotykasz trudności.

*Rozwiązanie:*

Korzystamy ze wzoru skróconego mnożenia (na różnicę kwadratów), a następnie wykonujemy szacowanie, aby skorzystać z kryterium porównawczego:

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n^{20}+n^8}-n^{10}) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^8}{\sqrt{n^{20}+n^8}+n^{10}} \leq \\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^8}{\sqrt{n^{20}+0}+n^{10}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^8}{2n^{10}} = \frac{1}{2} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < +\infty.\end{aligned}$$

**Odpowiedź:** Podany szereg jest zbieżny.

**295.** Rozstrzygnąć, czy szereg  $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n^{20}+n^9}-n^{10})$  jest zbieżny.

Zanim zajrzysz na kolejną stronę, rozwiąż powyższe zadanie, a przynajmniej podejmij próbę rozwiązania, aby wiedzieć, gdzie napotykasz trudności.

*Rozwiązanie:*

Korzystamy ze wzoru skróconego mnożenia (na różnicę kwadratów), a następnie wykonujemy szacowanie, aby skorzystać z kryterium porównawczego:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n^{20} + n^9} - n^{10}) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^9}{\sqrt{n^{20} + n^9} + n^{10}} \geq \\ &\geq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^9}{\sqrt{n^{20} + 3n^{20}} + n^{10}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^9}{3n^{10}} = \frac{1}{3} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty. \end{aligned}$$

**Odpowiedź:** Podany szereg jest rozbieżny.

**296.** Rozstrzygnąć, czy szereg  $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt[3]{n^3 + n} - n)$  jest zbieżny.

Zanim zajrzysz na kolejną stronę, rozwiąż powyższe zadanie, a przynajmniej podejmij próbę rozwiązania, aby wiedzieć, gdzie napotykasz trudności.

*Rozwiązanie:*

Korzystamy ze wzoru skróconego mnożenia (na różnicę sześcianów), a następnie wykonujemy szacowanie, aby skorzystać z kryterium porównawczego:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt[3]{n^3+n} - n) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n^3+n)^{2/3} + n \cdot (n^3+n)^{1/3} + n^2} \geqslant \\ &\geqslant \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n^3+7n^3)^{2/3} + n \cdot (n^3+7n^3)^{1/3} + n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{4n^2 + 2n^2 + n^2} = \frac{1}{7} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty. \end{aligned}$$

**Odpowiedź:** Podany szereg jest rozbieżny.

**297.** Rozstrzygnąć, czy szereg  $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt[4]{n^4+n} - n)$  jest zbieżny.

Zanim zajrzysz na kolejną stronę, rozwiąż powyższe zadanie, a przynajmniej podejmij próbę rozwiązania, aby wiedzieć, gdzie napotykasz trudności.

*Rozwiązanie:*

Korzystamy dwukrotnie ze wzoru na różnicę kwadratów, a następnie wykonujemy szacowanie, aby skorzystać z kryterium porównawczego:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt[4]{n^4+n} - n) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(\sqrt[4]{n^4+n}+n) \cdot (\sqrt{n^4+n}+n^2)} \leqslant \\ &\leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(\sqrt[4]{n^4+0}+n) \cdot (\sqrt{n^4+0}+n^2)} = \frac{1}{4} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < +\infty. \end{aligned}$$

**Odpowiedź:** Podany szereg jest zbieżny.

**298.** Rozstrzygnąć zbieżność szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt[3]{n^2+1} - \sqrt[3]{n^2}).$$

Zanim zajrzysz na kolejną stronę, rozwiąż powyższe zadanie, a przynajmniej podejmij próbę rozwiązania, aby wiedzieć, gdzie napotykasz trudności.

*Rozwiązanie:*

Przekształcimy dany w zadaniu szereg korzystając ze wzoru na różnicę sześcianów, a następnie skorzystamy z kryterium porównawczego:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt[3]{n^2+1} - \sqrt[3]{n^2}) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n^2+1)^{2/3} + n^{2/3} \cdot \sqrt[3]{n^2+1} + n^{4/3}} \leqslant \\ &\leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n^2+0)^{2/3} + n^{2/3} \cdot \sqrt[3]{n^2+0} + n^{4/3}} = \frac{1}{3} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{4/3}} < +\infty, \end{aligned}$$

bo  $4/3 > 1$ .

**Odpowiedź:** Dany w treści zadania szereg jest zbieżny.