

Dzień 22 (piątek 17 kwietnia 2020)**Szeregi liczbowe – kryteria d’Alemberta i Cauchy’ego.**

Za punkt wyjścia dzisiejszego wykładu weźmy następujące szeregi:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{2020}}{2^n}, \quad (1)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{2^n}, \quad (2)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\binom{3n}{n}}{6^n} \quad \text{oraz} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\binom{3n}{n}}{7^n}, \quad (3 \text{ i } 4)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n \cdot n!}{n^n} \quad \text{oraz} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n \cdot n!}{n^n}, \quad (5 \text{ i } 6)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{2^{n^2}}. \quad (7)$$

Przypomnę, że w przypadku szeregów na ogół nie mamy ambicji¹, aby wyliczyć sumę szeregu i w pełni zadowalamy się rozstrzygnięciem, czy szereg jest zbieżny. Jak dotąd jedynym poważnym kryterium zbieżności, jakim dysponujemy, jest kryterium porównawcze. Jest to bardzo subtelne kryterium wymagające subtelnych, choć na ogół nietrudnych oszacowań. Jest to nieocenione kryterium w przypadku szeregów, które są ”na granicy” zbieżności, bo potrafi odróżnić szereg, który zachowuje się jak rozbieżny szereg harmoniczny $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, od szeregu, który zachowuje się np. jak zbieżny szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1,000001}}$.

Szeregi, które wypisałem powyżej, nie mają w sobie nic z tego typu subtelności. Niektóre są zbieżne, a ich wyrazy bardzo szybko dążą do zera. Pozostałe są rozbieżne i to rozbieżne w sposób naprawdę spektakularny: ich wyrazy dążą do nieskończoności. W zasadzie ktoś mógłby powiedzieć: jeśli wyrazy szeregu dążą do nieskończoności, to jest on rozbieżny i po co nam inne kryteria. Cały problem polega na tym, że nie jesteśmy w stanie tego dążenia do nieskończoności łatwo zobaczyć. Powyższe szeregi mają wyrazy, które są ilorazami bardzo bardzo szybko rosnących wyrażeń. Wyrażenie z licznika jest na ogół zupełnie innego typu niż wyrażenie z mianownika. Trudno je sprawnie porównać, ale można założyć, że jeśli to są wyrażenia innego rodzaju, to jedno z nich rośnie o wiele szybciej od drugiego. Tylko które?

Wyobraź sobie na chwilę, że w powyższych siedmiu przykładach zamieniam $\sum_{n=1}^{\infty}$ na $\lim_{n \rightarrow \infty}$, czyli zamiast badania zbieżności szeregu oczekuję wyliczenia granicy (lub granicy niewłaściwej) ciągu wyrazów. I wyobraź sobie, że daję jeszcze dodatkową wskazówkę: każda z tych granic jest równa 0 albo $+\infty$. Czy jest Ci cokolwiek łatwiej? Raczej nie.

¹Brak ambicji wynika po prostu z braku możliwości.

Rozstrzygnięcie zbieżności tych szeregów, czy też wyliczenie granic ciągów ich wyrazów, wymagałoby każdorazowo dość uciążliwych szacowań, jeśli chcielibyśmy rozwiązać te zagadnienia "gołymi rękami". Jest jednak wspaniała maszyna, która faktycznie łączy w sobie kryterium porównawcze z wiedzą o zbieżności/rozbieżności szeregów geometrycznych.

Wyobraźmy sobie najpierw, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest szeregiem geometrycznym o dodatnim ilorazie różnym od 1. To, czy szereg ten jest zbieżny, czy rozbieżny zależy od porównania jego ilorazu z jedynką. Jeśli rozważymy ciąg ilorazów kolejnych wyrazów $\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$, to jest to ciąg stały, a jego wyrazy są równe ilorazowi rozważanego szeregu geometrycznego.

Niech teraz szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ będzie trochę zaburzonym² szeregiem geometrycznym. Wówczas ciąg ilorazów kolejnych wyrazów $\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ jest zaburzonym ciągiem stałym. Jeśli tenże ciąg $\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ jest zbieżny, powiedzmy do granicy $g \neq 1$, to dla dużych n mamy $\frac{a_{n+1}}{a_n} \approx g$, a więc możemy oczekiwać, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ zachowuje się podobnie³ do szeregu geometrycznego o ilorazie g .

Bez wdawania się w szczegóły techniczne dowodu, sformułujmy uprawdopodobnione powyższym rozumowaniem kryterium d'Alemberta:

Jeżeli (a_n) jest ciągiem o wyrazach dodatnich⁴ oraz istnieje granica⁵

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = g < 1,$$

to szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny.

Jeżeli istnieje granica (może być niewłaściwa $+\infty$)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = g > 1,$$

to szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest rozbieżny.

²Mniejsza o to, co to dokładnie znaczy.

³Nieco precyzyjniej można powiedzieć, że przy dodatnim ε i dla odpowiednio dużych n mamy oszacowania $g - \varepsilon < \frac{a_{n+1}}{a_n} < g + \varepsilon$, wobec czego szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ szacuje się od dołu przez szereg geometryczny o ilorazie $g - \varepsilon$, a od góry przez szereg geometryczny o ilorazie $g + \varepsilon$. Wystarczy teraz wziąć tak małe ε , aby $g - \varepsilon < g + \varepsilon < 1$ albo $g + \varepsilon > g - \varepsilon > 1$. Wówczas wszystkie trzy szeregi geometryczne (o ilorazach $g - \varepsilon$, g , $g + \varepsilon$) są jednocześnie zbieżne albo jednocześnie rozbieżne.

⁴Kilka stron dalej jest sformułowanie bardziej ogólne, gdzie nie zakładamy dodatniości wyrazów, ale za to na ilorazy wyrazów nakładamy moduł. Ponieważ dziś rozważamy tylko szeregi o wyrazach nieujemnych, na razie się tym nie przejmujemy.

⁵W tym wypadku g może być równe 0, co faktycznie oznacza, że wyrazy szeregu dążą do zera szybciej niż wyrazy jakiegokolwiek szeregu geometrycznego.

Procedura stosowania kryterium d'Alemberta wygląda więc następująco. Mamy szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, którego zbieżność chcemy zbadać. Póki co, założmy dla ustalenia uwagi, że ma on wyrazy **dodatnie**. Póki co założmy też, że na razie nie wchodzimy w niuanse, kiedy warto spróbować zastosować kryterium d'Alemberta – to wyczucie przychodzi z czasem⁶.

Obliczamy granicę $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = g$. Założmy, że się udało, co wymaga po pierwsze, żeby ta granica istniała, a po drugie, abyśmy byli w stanie przeprowadzić odpowiednie rachunki.

Jeżeli $g < 1$, to szereg jest zbieżny.

Jeżeli $g > 1$, to szereg jest rozbieżny.

Jeżeli natomiast $g = 1$, to kryterium nie daje rozstrzygnięcia, więc przeprowadzone przez nas rachunki niczego nie dowiodły.

Zajmijmy się więc po kolei przytoczonymi na początku dzisiejszego wykładu przykładami.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{2020}}{2^n}. \quad (1)$$

Oznaczmy $a_n = \frac{n^{2020}}{2^n}$. Wówczas

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^{2020} \cdot 2^n}{2^{n+1} \cdot n^{2020}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{2020}}{2} = \frac{1}{2} < 1,$$

skąd wynika, że szereg (1) jest zbieżny.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{2^n}, \quad (2)$$

Oznaczmy $a_n = \frac{n!}{2^n}$. Wówczas

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)! \cdot 2^n}{2^{n+1} \cdot n!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{2} = +\infty > 1,$$

skąd wynika, że szereg (2) jest rozbieżny.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\binom{3n}{n}}{6^n} \quad \text{oraz} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\binom{3n}{n}}{7^n}. \quad (3 \text{ i } 4)$$

Na pierwszy rzut oka nie widać istotnej różnicy między tymi szeregami. Ale można zgadnąć odpowiedź używając trochę psychologii. Skoro zostały podane dwa podobne przykłady, to pewnie się inaczej zachowują, więc jeden jest zbieżny, a drugi rozbieżny. Ale który jest jaki? Zbieżny powinien być szereg o mniejszych wyrazach, czyli większych mianownikach, czyli szereg (4).

⁶Pod warunkiem, że czas spędza się na rozwiązywaniu zadań. Sam upływ czasu niewiele tu pomoże.

A teraz na poważnie. Najpierw zastosujemy kryterium d'Alemberta do szeregu (3), a potem do (4). Oznaczmy $a_n = \frac{\binom{3n}{n}}{6^n}$. Wówczas

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\binom{3n+3}{n+1} \cdot 6^n}{6^{n+1} \cdot \binom{3n}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(3n+1) \cdot (3n+2) \cdot (3n+3)}{6 \cdot (n+1) \cdot (2n+1) \cdot (2n+2)} = \frac{9}{8} > 1,$$

skąd wynika, że szereg (3) jest rozbieżny.

Teraz oznaczmy $a_n = \frac{\binom{3n}{n}}{7^n}$. Wówczas

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\binom{3n+3}{n+1} \cdot 7^n}{7^{n+1} \cdot \binom{3n}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(3n+1) \cdot (3n+2) \cdot (3n+3)}{7 \cdot (n+1) \cdot (2n+1) \cdot (2n+2)} = \frac{27}{28} < 1,$$

skąd wynika, że szereg (4) jest zbieżny.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n \cdot n!}{n^n} \quad \text{oraz} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n \cdot n!}{n^n}. \quad (5 \text{ i } 6)$$

Oznaczmy $a_n = \frac{2^n \cdot n!}{n^n}$. Wówczas

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{n+1} \cdot (n+1)! \cdot n^n}{(n+1)^{n+1} \cdot 2^n \cdot n!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 \cdot (n+1) \cdot n^n}{(n+1)^{n+1}} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 \cdot n^n}{(n+1)^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n} = \frac{2}{e} < 1, \end{aligned}$$

skąd wynika, że szereg (5) jest zbieżny.

Analogicznie oznaczmy $a_n = \frac{3^n \cdot n!}{n^n}$. Wówczas

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^{n+1} \cdot (n+1)! \cdot n^n}{(n+1)^{n+1} \cdot 3^n \cdot n!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 \cdot (n+1) \cdot n^n}{(n+1)^{n+1}} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 \cdot n^n}{(n+1)^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n} = \frac{3}{e} > 1, \end{aligned}$$

skąd wynika, że szereg (6) jest rozbieżny.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{2^{n^2}}. \quad (7)$$

Niestety, tym razem próba zastosowania kryterium d'Alemberta prowadzi do kosztownych rachunków. Jednak istnieje podobne w duchu kryterium, które akurat w tym wypadku bardzo nam się przyda. Jest to kryterium Cauchy'ego:

Jeżeli (a_n) jest ciągiem o wyrazach nieujemnych⁷ oraz istnieje granica

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = g < 1,$$

to szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny.

Jeżeli istnieje granica (może być niewłaściwa $+\infty$)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = g > 1,$$

to szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest rozbieżny.

Zastosujemy kryterium Cauchy'ego do szeregu (7).

Oznaczmy $a_n = \frac{n^n}{2^{n^2}}$. Wówczas

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{n^n}{2^{n^2}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2^n} = b_n \rightarrow ???.$$

Jeśli nie umiemy teraz sprawnie przejść do granicy, to możemy zastosować kryterium d'Alemberta (ew. Cauchy'ego) w wersji dla ciągów. Otóż jeśli kryterium orzeka o zbieżności szeregu, to jako efekt uboczny dostajemy zbieżność ciągu wyrazów tego szeregu do zera. Możemy w ogóle nie być zainteresowani szeregiem, a jedynie ciągiem jego wyrazów – wówczas tak samo stosujemy kryterium d'Alemberta, tylko wyciągamy konkluzję o zbieżności ciągu wyrazów do zera. Trzeba też wiedzieć, że jeśli kryterium d'Alemberta (ew. Cauchy'ego) orzeka o rozbieżności szeregu, to jest to rozbieżność spektakularna – wyrazy dążą do nieskończoności.

Wracając do badania zbieżności szeregu (7), możemy zastosować kryterium d'Alemberta do **ciągu** (b_n) :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_{n+1}}{b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1) \cdot 2^n}{2^{n+1} \cdot n} = \frac{1}{2} < 1,$$

skąd wynika, że ciąg (b_n) jest zbieżny do 0. A ponieważ $0 < 1$, to pozwala dokończyć stosowanie kryterium Cauchy'ego do szeregu (7):

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{n^n}{2^{n^2}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2^n} = b_n \rightarrow 0 < 1$$

i wywnioskować, że szereg ten jest zbieżny.

Na razie tyle przykładów. Resztę biegłości nabędziesz rozwiązując zadania. Zapamiętaj jednak, że o wyborze między kryteriami d'Alemberta i Cauchy'ego decydują na ogół względy rachunkowe. Pierwiastek występujący w kryterium Cauchy'ego na ogół utrudnia lub uniemożliwia rachunki, ale czasami bardzo je upraszcza. I jeszcze jedno: Jeśli uda się zastosować oba te kryteria, to dadzą one dokładnie tę samą granicę g . Jeśli więc kryterium d'Alemberta doprowadziło do $g = 1$, to kryterium Cauchy'ego też nie da rozstrzygnięcia.

⁷W dalszej części wykładu jest sformułowanie bardziej ogólne, gdzie dopuszczamy wyrazy ujemne, ale nakładamy na nie moduł.

Kryteria zbieżności szeregów (cz. III).**5. KRYTERIUM D'ALEMBERTA.**

Jeżeli (a_n) jest ciągiem o wyrazach niezerowych oraz istnieje granica

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = g < 1 ,$$

to szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny.

Jeżeli istnieje granica (może być niewłaściwa $+\infty$)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = g > 1 ,$$

to szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest rozbieżny.

6. KRYTERIUM CAUCHY'EGO.

Jeżeli istnieje granica

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = g < 1 ,$$

to szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny.

Jeżeli istnieje granica (może być niewłaściwa $+\infty$)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = g > 1 ,$$

to szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest rozbieżny.

7. KRYTERIUM D'ALEMBERTA DLA CIĄGÓW.

Jeżeli (a_n) jest ciągiem o wyrazach niezerowych oraz istnieje granica

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = g < 1 ,$$

to ciąg (a_n) jest zbieżny do zera.

Jeżeli istnieje granica (może być niewłaściwa $+\infty$)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = g > 1 ,$$

to ciąg (a_n) jest rozbieżny, a ciąg $(|a_n|)$ jest rozbieżny do $+\infty$.

8. KRYTERIUM CAUCHY'EGO DLA CIĄGÓW.

Jeżeli istnieje granica $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = g < 1$, to ciąg (a_n) jest zbieżny do zera.

Jeżeli istnieje granica (może być niewłaściwa $+\infty$) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = g > 1$, to ciąg (a_n) jest rozbieżny, a ciąg $(|a_n|)$ jest rozbieżny do $+\infty$.

299. Rozstrzygnąć zbieżność szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3n)!}{28^n \cdot (n!)^3} .$$

Zanim zajrzysz na kolejną stronę, rozwiąż powyższe zadanie, a przynajmniej podejmij próbę rozwiązania, aby wiedzieć, gdzie napotykasz trudności.

Rozwiązanie:

W rozwiązaniu skorzystamy z kryterium d'Alemberta.

W tym celu przekształcimy iloraz kolejnych wyrazów szeregu, przejdziemy z nim do granicy przy $n \rightarrow \infty$, a następnie porównamy otrzymaną granicę z liczbą 1:

$$\frac{(3n+3)!}{28^{n+1} \cdot ((n+1)!)^3} \cdot \frac{28^n \cdot (n!)^3}{(3n)!} = \frac{(3n+1) \cdot (3n+2) \cdot (3n+3)}{28 \cdot (n+1)^3} \rightarrow \frac{27}{28} < 1,$$

skąd wynika, że dany w treści zadania szereg jest zbieżny.

300. Rozstrzygnąć zbieżność szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n! \cdot 18^n}{\binom{3n}{n} \cdot n^n}.$$

Zanim zajrzysz na kolejną stronę, rozwiąż powyższe zadanie, a przynajmniej podejmij próbę rozwiązania, aby wiedzieć, gdzie napotykasz trudności.

Rozwiązanie:

Stosujemy kryterium d'Alemberta do danego w zadaniu szeregu:

$$\begin{aligned} & \frac{(n+1)! \cdot 18^{n+1}}{\binom{3n+3}{n+1} \cdot (n+1)^{n+1}} \cdot \frac{\binom{3n}{n} \cdot n^n}{n! \cdot 18^n} = \frac{(n+1) \cdot 18 \cdot \frac{(3n)!}{n! \cdot (2n)!}}{\frac{(3n+3)!}{(n+1)! \cdot (2n+2)!} \cdot \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \cdot (n+1)} = \\ & = \frac{18}{\frac{(3n+1) \cdot (3n+2) \cdot (3n+3)}{(n+1) \cdot (2n+1) \cdot (2n+2)} \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} = \frac{18}{\frac{(3n+1) \cdot (3n+2) \cdot 3}{(n+1) \cdot (2n+1) \cdot 2} \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} \rightarrow \frac{18}{\frac{27}{4} \cdot e} = \frac{8}{3e} = \frac{2, (6)}{e} < 1, \end{aligned}$$

skąd na mocy kryterium d'Alemberta wynika zbieżność szeregu.

Skorzystaliśmy przy tym z nierówności $e > 2, (6)$, która wynika albo z zapamiętanego rozwinięcia dziesiętnego $e = 2, 7 \dots$, albo ze wzoru⁸

$$e = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} > \sum_{k=0}^3 \frac{1}{k!} = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{8}{3}.$$

Odpowiedź: Dany w zadaniu szereg jest zbieżny.

301. Rozstrzygnąć, czy szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{7^n + \binom{2n}{n}^2}}{3^n}$ jest zbieżny.

Zanim zajrzysz na kolejną stronę, rozwiąż powyższe zadanie, a przynajmniej podejmij próbę rozwiązania, aby wiedzieć, gdzie napotkasz trudności.

⁸Co prawda jeszcze o wzorze $e = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$ nie mówiliśmy, ale jak ktoś go zna, to może w razie potrzeby zastosować.

Rozwiązanie:

Korzystamy z kryterium porównawczego, a następnie z kryterium d'Alemberta:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{7^n + \binom{2n}{n}^2}}{3^n} \geq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{0 + \binom{2n}{n}^2}}{3^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\binom{2n}{n}}{3^n},$$

$$\frac{\binom{2n+2}{n+1}}{3^{n+1}} \cdot \frac{3^n}{\binom{2n}{n}} = \frac{(2n+2)! \cdot (n!)^2}{3 \cdot ((n+1)!)^2 \cdot (2n)!} = \frac{(2n+1) \cdot (2n+2)}{3 \cdot (n+1)^2} \rightarrow \frac{4}{3} > 1,$$

a zatem na mocy kryterium d'Alemberta szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\binom{2n}{n}}{3^n}$ jest rozbieżny, a stąd na mocy

kryterium porównawczego rozbieżny jest także szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{7^n + \binom{2n}{n}^2}}{3^n}$.

Odpowiedź: Podany szereg jest rozbieżny.

302. Rozstrzygnąć zbieżność szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^{n^3}}{2^{n^2} \cdot n^{n^3}}$.

Zanim zajrzysz na kolejną stronę, rozwiąż powyższe zadanie, a przynajmniej podejmij próbę rozwiązania, aby wiedzieć, gdzie napotykasz trudności.

Rozwiązanie:

Oznaczmy $a_n = \frac{(n+1)^{n^3}}{2^{n^2} \cdot n^{n^3}}$ i zastosujmy kryterium Cauchy'ego do zbadania zbieżności szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Otrzymujemy

$$\sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{\frac{(n+1)^{n^3}}{2^{n^2} \cdot n^{n^3}}} = \frac{(n+1)^{n^2}}{2^n \cdot n^{n^2}} = b_n.$$

Ponieważ nie umiemy od razu stwierdzić, do czego dąży b_n przy $n \rightarrow \infty$, stosujemy ponownie kryterium Cauchy'ego, tym razem do **ciągu** (b_n) . Otrzymujemy

$$\sqrt[n]{b_n} = \sqrt[n]{\frac{(n+1)^{n^2}}{2^n \cdot n^{n^2}}} = \frac{(n+1)^n}{2 \cdot n^n} = \frac{1}{2} \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \rightarrow \frac{e}{2} > 1.$$

Z kryterium Cauchy'ego zastosowanego do ciągu (b_n) wynika więc, że

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = +\infty.$$

Wobec tego

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = +\infty > 1,$$

skąd na podstawie kryterium Cauchy'ego zastosowanego do szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ wnioskujemy, że szereg ten jest rozbieżny.