

Dzień 23 (poniedziałek 20 kwietnia 2020)**Szeregi liczbowe – zbieżność bezwzględna.**

W tym tygodniu zajmiemy się kryteriami zbieżności szeregów o wyrazach dowolnego znaku¹.

Na początek rozważmy następujący szereg:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n^{2020^{2020}})}{n^2}.$$

Czy ten szereg ma tylko wyrazy dodatnie, czy też ma wyrazy różnych znaków? Przyjrzyjmy mu się trochę. Pierwszy wyraz to

$$\frac{\sin 1}{1^2} = \sin 1 \approx 0,841471,$$

jest więc dodatni.

Z kolei drugi wyraz jest równy

$$\frac{\sin(2^{2020^{2020}})}{4}.$$

W argumencie sinusa jest liczba większa od $10^{10^{6676}}$. Wartość sinusa zależy od tego, jak ta liczba jest położona względem wielokrotności π . Żeby to ustalić, trzeba byłoby znać liczbę π z dokładnością do ponad 10^{6676} cyfr po przecinku. Czy znamy lub kiedyś poznamy liczbę π z taką dokładnością? Biorąc pod uwagę, że liczba cząsteczek we wszechświecie jest mniejsza od 10^{100} , do zapisania tak dokładnego przybliżenia liczby π potrzebowalibyśmy więcej niż 10^{6576} wszechświatów. Tak więc w/g naszej najlepszej wiedzy drugi wyraz szeregu jest jakąś liczbą pomiędzy $-1/4$ i $1/4$.

Wydaje się wprost nieprawdopodobne, aby wszystkie wyrazy szeregu były dodatnie², ale trudno wyobrazić sobie dowód, że występuje w nim choćby jeden wyraz ujemny.

Skoro tak mało wiemy o wyrazach tego szeregu, jak mamy rozstrzygnąć jego zbieżność?

Z pomocą przyjdzie nam kryterium zbieżności bezwzględnej.

Kryteria zbieżności szeregów (cz. IV).**9. ZBIEŻNOŚĆ BEZWZGLĘDNA.**

Jeżeli $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < \infty$, to szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny.

Zastosowanie tego kryterium do rozważanego szeregu każe nam spojrzeć na szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{\sin(n^{2020^{2020}})}{n^2} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\sin(n^{2020^{2020}})|}{n^2} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < +\infty,$$

który jest zbieżny na mocy kryterium porównawczego.

¹Czyli niekoniecznie o samych wyrazach nieujemnych.

²Bo wydaje się, że znaki wyrazów są kompletnie przypadkowe.

Podsumowując: Załóżmy, że badamy zbieżność szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Jeżeli udowodnimy (na przykład przez zastosowanie kryterium porównawczego), że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ jest zbieżny, to możemy stąd wywnioskować, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny. W takiej sytuacji powiemy, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest bezwzględnie zbieżny, a ponadto zachodzi nierówność³

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} a_n \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|.$$

Uwaga: Naturalne jest pytanie: Czy jeśli szereg $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ jest rozbieżny, to rozbieżny musi być także szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$?

Jutro się przekonamy, że tak być nie musi – poznamy przykład szeregu, który jest zbieżny, ale nie jest bezwzględnie zbieżny.

³Taka nierówność trójkąta dla nieskończenie wielu składników.