Dzień 24 (wtorek 21 kwietnia 2020)

Szereg anharmoniczny.

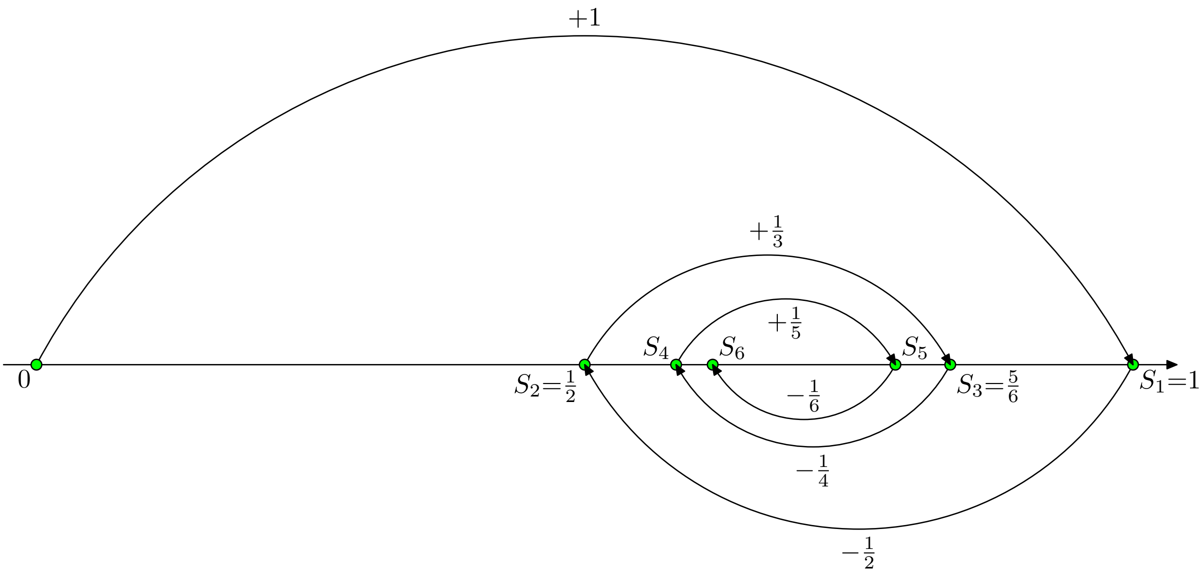
Wczorajsz wykład zakończyłem pytaniem: Czy jeśli szereg $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ jest rozbieżny, to rozbieżny musi być także szereg $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$?

Zapowiedziałem też przykład szeregu, który jest zbieżny, ale nie jest bezwzględnie zbieżny.

Takim szeregiem jest szereg anharmoniczny:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\frac{1}{7}-\frac{1}{8}+\ldots\,.$$

Szereg wartości bezwzględnych jego wyrazów to szereg harmoniczny, który jest rozbieżny. A dlaczego szereg anharmoniczny jest zbieżny? Spróbujmy prześledzić ciąg jego sum częściowych (rys. 1 i 2).



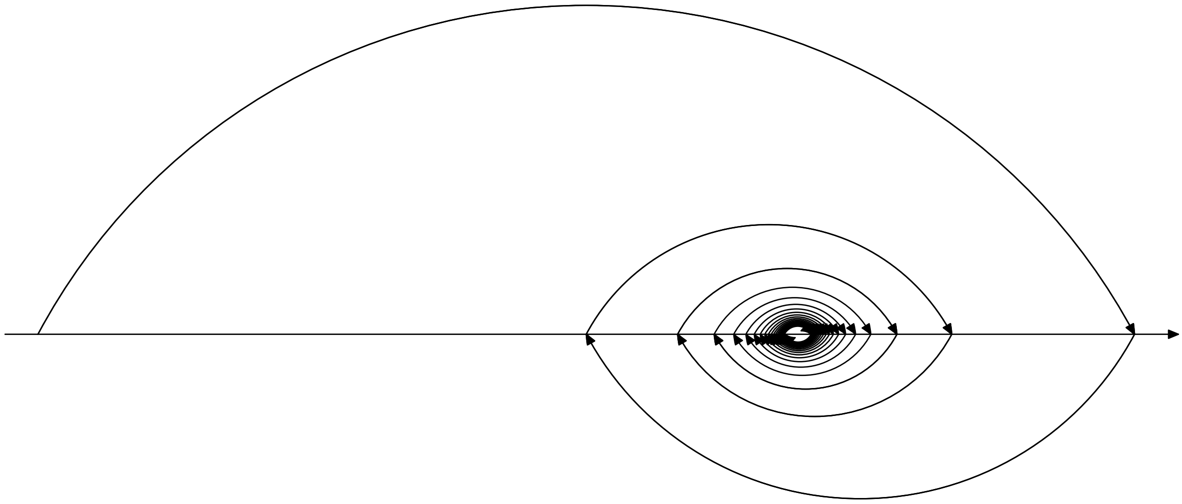
rys. 1

Startujemy od zera, czyli jakby zerowej sumy częściowej S_0. Dodajemy pierwszy wyraz równy 1. Potem odejmujemy 1/2 (mniej niż przed chwilą dodaliśmy). Następnie dodajemy 1/3 (mniej niż przed chwilą odjęliśmy). Następnie odejmujemy 1/4 (mniej niż przed chwilą dodaliśmy). Następnie dodajemy 1/5 (mniej niż przed chwilą odjęliśmy). I tak dalej. Na przemian dodajemy i odejmujemy liczby, przy czym każda kolejna ma mniejszą wartość bezwzględną niż poprzednia.

Wynika stąd, że sumy częściowe o parzystych indeksach tworzą ciąg rosnący, a sumy częściowe o indeksach nieparzystych malejący[1]:

$$S_2<S_4<S_6<S_8<S_{10}<\ldots<S_9<S_7<S_5<S_3<S_1\,.$$

[1]A przy tym każda suma częsciowa o indeksie parzystym jest mniejsza od każdej sumy częściowej o indeksie nieparzystym.



rys. 2

Mamy więc dwa ciągi monotoniczne i ograniczone: $(S_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ oraz $(S_{2n-1})_{n\in\mathbb{N}}$. Ciągi te są zbieżne[2], powiedzmy odpowiednio do granic g_1 i g_2. Ponieważ jednak

$$S_{2n}=S_{2n-1}-\frac{1}{2n}\,,$$

otrzymujemy

$$\lim_{n\to\infty} S_{2n}=\lim_{n\to\infty} S_{2n-1}-\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n}\,,$$

skąd $g_1=g_2-0$, czyli $g_1=g_2$. Ponieważ ciąg sum częściowych rozbiliśmy na dwa podciągi zbieżne do wspólnej granicy, wynika stąd, że jest on zbieżny. A to oznacza, że zbieżny jest rozważany przez nas szereg anharmoniczny.

Jeżeli zastanowimy się, co było istotne w tym dowodzie zbieżności szeregu, to dojdziemy do wniosku, że korzystaliśmy z trzech założeń:
• wyrazy szeregu są na przemian dodatnie i ujemne,
• każdy kolejny wyraz jest co do wartości bezwzględnej mniejszy[3] niż poprzedni,
• wyrazy szeregu dążą do zera.

To prowadzi nas do kryterium Leibniza zwanego też kryterium zbieżności szeregów naprzemiennych.

Kryteria zbieżności szeregów (cz. V).

10. Szeregi naprzemienne.
Jeżeli (a_n) jest ciągiem nierosnącym zbieżnym do 0, to szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(-1)^{n+1}$ jest zbieżny[4].

Jutro zrobimy sobie trochę przykładów na zastosowanie tego kryterium.

[2]Pamiętamy, że każdy ciąg monotoniczny i ograniczony jest zbieżny, prawda?
[3]Wystarczy "nie większy".
[4]Równie dobrze można podać tu szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(-1)^n$.