

**Dzień 25 (środa 22 kwietnia 2020)****Szeregi naprzemienne – kryterium Leibniza.**

Dziś porozwiązujemy sobie zadanka z wykorzystaniem kryterium Leibniza o szeregach naprzemiennych. Należy pamiętać, że bardzo ważne jest precyzyjne sformułowanie warunków tego kryterium, nawet tych, których spełnianie jest oczywiste.

Warunki są trzy:

1° W szeregu na przemian występują wyrazy dodatnie i ujemne – na ogół jest to oczywiste.

2° Ciąg wartości bezwzględnych wyrazów jest zbieżny do zera.  
To może być oczywiste, a może wymagać pewnego nietrudnego rachunku.

3° Ciąg wartości bezwzględnych wyrazów jest nierosnący.  
To może być oczywiste, a może wymagać rachunków na tyle nieoczywistych, że w tym właśnie warunku leży główna trudność zadania.

Czasami może się zdarzyć, że ciąg wartości bezwzględnych wyrazów szeregu jest nierosnący dopiero od pewnego miejsca. Jeśli powołujemy się na kryterium Leibniza w wersji, w której założenie brzmi "ciąg wartości bezwzględnych wyrazów jest nierosnący", to powinniśmy odrzucić ileś tam początkowych wyrazów szeregu i powołać się na to, że odrzucenie początkowych wyrazów nie wpływa na zbieżność, a samo kryterium Leibniza zastosować do szeregu z usuniętymi początkowymi wyrazami. Pamiętaj: Jeżeli ciąg modułów wyrazów szeregu nie jest nierosnący od samego początku, a Twoje rachunki tego nie wykryją, to znaczy, że rozwiązanie jest błędne (nieświadomy błąd rachunkowy lub świadomy błąd: przerywamy rachunki w połowie i piszemy, że wychodzi).

**341.** Udowodnić zbieżność szeregu  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot n}{(n+1) \cdot (n+2)}$ .

**Zanim zajrzysz na kolejną stronę, rozwiąż powyższe zadanie, a przynajmniej podejmij próbę rozwiązania, aby wiedzieć, gdzie napotykasz trudności.**

*Rozwiązanie:*

Aby udowodnić zbieżność szeregu danego w treści zadania, skorzystamy z kryterium Leibniza o szeregach naprzemiennych.

W tym celu musimy zweryfikować prawdziwość trzech założeń tego kryterium.

1° W szeregu na przemian występują wyrazy dodatnie i ujemne - oczywiste.

2° Ciąg wartości bezwzględnych wyrazów jest zbieżny do zera.

Sprawdzamy to następująco:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{(n+1) \cdot (n+2)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n}}{\left(1 + \frac{1}{n}\right) \cdot \left(1 + \frac{2}{n}\right)} = \frac{0}{1 \cdot 1} = 0.$$

3° Ciąg wartości bezwzględnych wyrazów jest nierosnący.

Ten warunek jest najmniej oczywisty. Aby go udowodnić, powinniśmy wykazać, że dla dowolnej liczby naturalnej  $n$  zachodzi nierówność

$$\frac{n}{(n+1) \cdot (n+2)} \geq \frac{n+1}{(n+2) \cdot (n+3)},$$

co kolejno jest równoważne nierównościom

$$\begin{aligned} \frac{n}{n+1} &\geq \frac{n+1}{n+3}, \\ n \cdot (n+3) &\geq (n+1) \cdot (n+1), \\ n^2 + 3n &\geq n^2 + 2n + 1, \\ n &\geq 1, \end{aligned}$$

skąd wynika, że dowodzona nierówność jest prawdziwa dla każdej liczby naturalnej  $n$ .

W konsekwencji szereg dany w treści zadania jest zbieżny na mocy kryterium Leibniza o szeregach naprzemiennych.

**342.** Udowodnić zbieżność szeregu  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot (2n-1) \cdot (2n+1)}{(3n-1) \cdot (3n+2) \cdot (3n+5)}.$

**Zanim zajrzysz na kolejną stronę, rozwiąż powyższe zadanie, a przynajmniej podejmij próbę rozwiązania, aby wiedzieć, gdzie napotykasz trudności.**

*Rozwiązanie:*

Aby udowodnić zbieżność szeregu danego w treści zadania, skorzystamy z kryterium Leibniza o szeregach naprzemiennych.

W tym celu musimy zweryfikować prawdziwość trzech założeń tego kryterium.

1° W szeregu na przemian występują wyrazy dodatnie i ujemne - oczywiste.

2° Ciąg wartości bezwzględnych wyrazów jest zbieżny do zera.

Sprawdzamy to następująco:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n-1) \cdot (2n+1)}{(3n-1) \cdot (3n+2) \cdot (3n+5)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(2 - \frac{1}{n}\right) \cdot \left(2 + \frac{1}{n}\right) \cdot \frac{1}{n}}{\left(3 - \frac{1}{n}\right) \cdot \left(3 + \frac{2}{n}\right) \cdot \left(3 + \frac{5}{n}\right)} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 0}{3 \cdot 3 \cdot 3} = 0.$$

3° Ciąg wartości bezwzględnych wyrazów jest nierosnący.

Ten warunek jest najmniej oczywisty. Aby go udowodnić, powinniśmy wykazać, że dla dowolnej liczby naturalnej  $n$  zachodzi nierówność

$$\frac{(2n-1) \cdot (2n+1)}{(3n-1) \cdot (3n+2) \cdot (3n+5)} \geq \frac{(2n+1) \cdot (2n+3)}{(3n+2) \cdot (3n+5) \cdot (3n+8)},$$

co kolejno jest równoważne nierównościom

$$\begin{aligned} \frac{2n-1}{3n-1} &\geq \frac{2n+3}{3n+8}, \\ (2n-1) \cdot (3n+8) &\geq (2n+3) \cdot (3n-1), \\ 6n^2 + 13n - 8 &\geq 6n^2 + 7n - 3, \\ 6n &\geq 5, \end{aligned}$$

skąd wynika, że dowodzona nierówność jest prawdziwa dla każdej liczby naturalnej  $n$ .

W konsekwencji szereg dany w treści zadania jest zbieżny na mocy kryterium Leibniza o szeregach naprzemiennych.

**343.** Udowodnić zbieżność szeregu  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot (7n-6) \cdot (7n+1)}{(5n-4) \cdot (5n+1) \cdot (5n+6)}.$

**Zanim zajrzysz na kolejną stronę, rozwiąż powyższe zadanie, a przynajmniej podejmij próbę rozwiązania, aby wiedzieć, gdzie napotykasz trudności.**

*Rozwiązanie:*

Aby udowodnić zbieżność szeregu danego w treści zadania, skorzystamy z kryterium Leibniza o szeregach naprzemiennych.

W tym celu musimy zweryfikować prawdziwość trzech założeń tego kryterium.

1° W szeregu na przemian występują wyrazy dodatnie i ujemne - oczywiste.

2° Ciąg wartości bezwzględnych wyrazów jest zbieżny do zera.

Sprawdzamy to następująco:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(7n-6) \cdot (7n+1)}{(5n-4) \cdot (5n+1) \cdot (5n+6)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(7 - \frac{6}{n}\right) \cdot \left(7 + \frac{1}{n}\right) \cdot \frac{1}{n}}{\left(5 - \frac{4}{n}\right) \cdot \left(5 + \frac{1}{n}\right) \cdot \left(5 + \frac{6}{n}\right)} = \frac{7 \cdot 7 \cdot 0}{5 \cdot 5 \cdot 5} = 0.$$

3° Ciąg wartości bezwzględnych wyrazów jest nierosnący.

Ten warunek jest najmniej oczywisty. Aby go udowodnić, powinniśmy wykazać, że dla dowolnej liczby naturalnej  $n$  zachodzi nierówność

$$\frac{(7n-6) \cdot (7n+1)}{(5n-4) \cdot (5n+1) \cdot (5n+6)} \geq \frac{(7n+1) \cdot (7n+8)}{(5n+1) \cdot (5n+6) \cdot (5n+11)},$$

co kolejno jest równoważne nierównościom

$$\frac{7n-6}{5n-4} \geq \frac{7n+8}{5n+11},$$

$$(7n-6) \cdot (5n+11) \geq (7n+8) \cdot (5n-4),$$

$$35n^2 + 77n - 30n - 66 \geq 35n^2 - 28n + 40n - 32,$$

$$35n^2 + 47n - 66 \geq 35n^2 + 12n - 32,$$

$$35n \geq 34,$$

skąd wynika, że dowodzona nierówność jest prawdziwa dla każdej liczby naturalnej  $n$ .

W konsekwencji szereg dany w treści zadania jest zbieżny na mocy kryterium Leibniza o szeregach naprzemiennych.

**344.** Udowodnić zbieżność szeregu  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot n}{n^2 + 2}$ .

**Zanim zajrzysz na kolejną stronę, rozwiąż powyższe zadanie, a przynajmniej podejmij próbę rozwiązania, aby wiedzieć, gdzie napotykasz trudności.**

*Rozwiązanie:*

Aby udowodnić zbieżność szeregu danego w treści zadania, skorzystamy z kryterium Leibniza o szeregach naprzemiennych, które wymaga spełnienia następujących trzech warunków:

1° W szeregu na przemian występują wyrazy dodatnie i ujemne.

Spełnienie tego warunku jest oczywiste.

2° Ciąg wartości bezwzględnych wyrazów jest zbieżny do zera.

Sprawdzamy to następująco:

$$\frac{n}{n^2+2} = \frac{\frac{1}{n}}{1+\frac{2}{n^2}} \rightarrow \frac{0}{1+0} = 0.$$

3° Ciąg wartości bezwzględnych wyrazów jest nierosnący.

W celu udowodnienia tego warunku udowodnimy nierówność

$$\frac{n}{n^2+2} \geq \frac{n+1}{(n+1)^2+2},$$

która jest równoważna kolejnym nierównościom:

$$n \cdot (n^2 + 2n + 3) \geq (n+1) \cdot (n^2 + 2),$$

$$n^3 + 2n^2 + 3n \geq n^3 + n^2 + 2n + 2,$$

$$n^2 + n \geq 2,$$

co jest spełnione dla każdego  $n \geq 1$ .

W konsekwencji szereg dany w treści zadania jest zbieżny na mocy kryterium Leibniza o szeregach naprzemiennych.

**345.** Udowodnić zbieżność szeregu  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot n \cdot (n+1) \cdot (n+2)}{(3n+1) \cdot (3n+4) \cdot (3n+7) \cdot (3n+10)}.$

**Zanim zajrzysz na kolejną stronę, rozwiąż powyższe zadanie, a przynajmniej podejmij próbę rozwiązania, aby wiedzieć, gdzie napotykasz trudności.**

*Rozwiązanie:*

Aby udowodnić zbieżność szeregu danego w treści zadania, skorzystamy z kryterium Leibniza o szeregach naprzemiennych.

W tym celu musimy zweryfikować prawdziwość trzech założeń tego kryterium.

1° W szeregu na przemian występują wyrazy dodatnie i ujemne - oczywiste.

2° Ciąg wartości bezwzględnych wyrazów jest zbieżny do zera.

Sprawdzamy to następująco:

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \cdot (n+1) \cdot (n+2)}{(3n+1) \cdot (3n+4) \cdot (3n+7) \cdot (3n+10)} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right) \cdot \left(1 + \frac{2}{n}\right) \cdot \frac{1}{n}}{\left(3 + \frac{1}{n}\right) \cdot \left(3 + \frac{4}{n}\right) \cdot \left(3 + \frac{7}{n}\right) \cdot \left(3 + \frac{10}{n}\right)} = \frac{1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 0}{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3} = 0. \end{aligned}$$

3° Ciąg wartości bezwzględnych wyrazów jest nierosnący.

Ten warunek jest najmniej oczywisty. Aby go udowodnić, powinniśmy wykazać, że dla dowolnej liczby naturalnej  $n$  zachodzi nierówność

$$\frac{n \cdot (n+1) \cdot (n+2)}{(3n+1) \cdot (3n+4) \cdot (3n+7) \cdot (3n+10)} \geq \frac{(n+1) \cdot (n+2) \cdot (n+3)}{(3n+4) \cdot (3n+7) \cdot (3n+10) \cdot (3n+13)},$$

co kolejno jest równoważne nierównościom

$$\begin{aligned} & \frac{n}{3n+1} \geq \frac{n+3}{3n+13}, \\ & n \cdot (3n+13) \geq (n+3) \cdot (3n+1), \\ & 3n^2 + 13n \geq 3n^2 + 10n + 3, \\ & 3n \geq 3, \\ & n \geq 1, \end{aligned}$$

skąd wynika, że dowodzona nierówność jest prawdziwa dla każdej liczby naturalnej  $n$ .

W konsekwencji szereg dany w treści zadania jest zbieżny na mocy kryterium Leibniza o szeregach naprzemiennych.

**346.** Udowodnić zbieżność szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot \sqrt{n}}{n+100}.$$

**Zanim zajrzysz na kolejną stronę, rozwiąż powyższe zadanie, a przynajmniej podejmij próbę rozwiązania, aby wiedzieć, gdzie napotykasz trudności.**

*Rozwiązanie:*

Spróbujemy udowodnić zbieżność danego szeregu korzystając z kryterium Leibniza o szeregach naprzemiennych.

Aby to udowodnić, musimy zweryfikować prawdziwość trzech założeń tego kryterium.

1° W szeregu na przemian występują wyrazy dodatnie i ujemne – oczywiste.

2° Ciąg wartości bezwzględnych wyrazów jest zbieżny do zera.

Sprawdzamy to następująco:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n}}{n+100} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{n}}}{1 + \frac{100}{n}} = \frac{0}{1+0} = 0.$$

3° Ciąg wartości bezwzględnych wyrazów jest nierosnący.

Ten warunek jest najmniej oczywisty. Aby go udowodnić, powinniśmy wykazać, że dla każdej liczby naturalnej  $n$  zachodzi nierówność

$$\frac{\sqrt{n}}{n+100} \geq \frac{\sqrt{n+1}}{n+101}, \quad (*)$$

co kolejno jest równoważne nierównościom

$$\begin{aligned} \sqrt{n} \cdot (n+101) &\geq \sqrt{n+1} \cdot (n+100), \\ n \cdot (n+101)^2 &\geq (n+1) \cdot (n+100)^2, \\ n \cdot (n^2 + 202n + 10201) &\geq (n+1) \cdot (n^2 + 200n + 10000), \\ n^3 + 202n^2 + 10201n &\geq n^3 + 201n^2 + 10200n + 10000, \\ n^2 + n &\geq 10000, \\ n \cdot (n+1) &\geq 100 \cdot 100, \end{aligned}$$

skąd wynika, że nierówność (\*) jest prawdziwa dla każdej liczby naturalnej  $n \geq 100$ .

Zatem szereg  $\sum_{n=100}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot \sqrt{n}}{n+100}$  spełnia warunki kryterium Leibniza o szeregach naprzemiennych, wobec czego jest zbieżny.

Ponieważ zbieżność szeregu nie zależy od zmiany lub pominięcia skończenie wielu wyrazów, także szereg  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot \sqrt{n}}{n+100}$  jest zbieżny.

**347.** Udowodnić zbieżność szeregu  $\sum_{n=1}^{\infty} ((-1)^n \cdot (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}))$ .

**Zanim zajrzysz na kolejną stronę, rozwiąż powyższe zadanie, a przynajmniej podejmij próbę rozwiązania, aby wiedzieć, gdzie napotykasz trudności.**

*Rozwiązanie:*

Aby udowodnić zbieżność szeregu danego w treści zadania, skorzystamy z kryterium Leibniza o szeregach naprzemiennych, które wymaga spełnienia następujących trzech warunków:

- 1° W szeregu na przemian występują wyrazy dodatnie i ujemne.
- 2° Ciąg wartości bezwzględnych wyrazów jest zbieżny do zera.
- 3° Ciąg wartości bezwzględnych wyrazów jest nierosnący.

Warunki te stają się oczywiste po zapisaniu wartości bezwzględnych wyrazów szeregu w innej postaci:

$$\sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}.$$

W konsekwencji szereg dany w treści zadania jest zbieżny na mocy kryterium Leibniza o szeregach naprzemiennych.

## O czym będzie jutro?

Wczoraj opowiedziałem Wam o szeregu anharmonicznym

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \frac{1}{9} - \frac{1}{10} + \frac{1}{11} - \frac{1}{12} + \dots,$$

który jest zbieżny. Możemy przeorganizować jego wyrazy tak, aby brać po dwa wyrazy dodatnie na przemian z jednym wyrazem ujemnym, nie zmieniając przy tym wzajemnej kolejności wyrazów tego samego znaku:

$$1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{6} + \frac{1}{13} + \frac{1}{15} - \frac{1}{8} + \frac{1}{17} + \frac{1}{19} - \frac{1}{10} + \dots$$

W jednej i drugiej wersji tego szeregu wstawmy nawiasy<sup>1</sup>:

$$\underbrace{1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3}}_{=5/6} + \underbrace{\left(-\frac{1}{4} + \frac{1}{5}\right)}_{<0} + \underbrace{\left(-\frac{1}{6} + \frac{1}{7}\right)}_{<0} + \underbrace{\left(-\frac{1}{8} + \frac{1}{9}\right)}_{<0} + \underbrace{\left(-\frac{1}{10} + \frac{1}{11}\right)}_{<0} + \underbrace{\left(-\frac{1}{12} + \frac{1}{13}\right)}_{<0} + \dots$$

$$\underbrace{1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2}}_{=5/6} + \underbrace{\left(\frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4}\right)}_{=\frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} - \frac{1}{8} > 0} + \underbrace{\left(\frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{6}\right)}_{=\frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{12} - \frac{1}{12} > 0} + \underbrace{\left(\frac{1}{13} + \frac{1}{15} - \frac{1}{8}\right)}_{>0} + \underbrace{\left(\frac{1}{17} + \frac{1}{19} - \frac{1}{10}\right)}_{>0} + \dots$$

Popatrz uważnie na powyższe wzorki i odpowiedz na pytanie:

**Czy suma szeregu anharmonicznego jest mniejsza czy większa od 5/6?**

<sup>1</sup>To nie jest nic podejrzanego, po prostu chcę zwrócić uwagę na sumy pewnych grup kolejnych wyrazów. Ogólnie: W szeregu można bezkarnie wstawiać nawiasy, jeśli ciąg wyrazów szeregu dąży do zera, a w nawiasach jest ograniczona liczba wyrazów – w tym wypadku w nawiasach są nie więcej niż 3 wyrazy. Wstawienie nawiasów w szeregu oznacza pominięcie pewnych sum częściowych. Jeśli dalekie wyrazy są małe, to pominięte sumy częściowe mało różnią się od sum, które pozostawiamy, więc nie wpływa to na zbieżność ciągu sum częściowych, czyli na zbieżność szeregu.