

Dzień 26 (czwartek 23 kwietnia 2020)

Wczorajszy wykład zakończyłem podaniem szeregu anharmonicznego i jego permutacji¹:

$$\underbrace{1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3}}_{=5/6} + \underbrace{\left(-\frac{1}{4} + \frac{1}{5}\right)}_{<0} + \underbrace{\left(-\frac{1}{6} + \frac{1}{7}\right)}_{<0} + \underbrace{\left(-\frac{1}{8} + \frac{1}{9}\right)}_{<0} + \underbrace{\left(-\frac{1}{10} + \frac{1}{11}\right)}_{<0} + \underbrace{\left(-\frac{1}{12} + \frac{1}{13}\right)}_{<0} + \dots$$

$$\underbrace{1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2}}_{=5/6} + \underbrace{\left(\frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4}\right)}_{=\frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} - \frac{1}{8} > 0} + \underbrace{\left(\frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{6}\right)}_{=\frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{12} - \frac{1}{12} > 0} + \underbrace{\left(\frac{1}{13} + \frac{1}{15} - \frac{1}{8}\right)}_{>0} + \underbrace{\left(\frac{1}{17} + \frac{1}{19} - \frac{1}{10}\right)}_{>0} + \dots$$

i postawiłem następujące pytanie:

Czy suma szeregu anharmonicznego jest mniejsza czy większa od 5/6?

Patrząc na pierwszy szereg, czyli oryginalny szereg anharmoniczny, widzimy pierwsze trzy wyrazy o sumie 5/6, a następujące dalej wyrazy można połączyć w pary o ujemnej sumie. Płynie stąd wniosek, że suma szeregu anharmonicznego jest mniejsza od 5/6.

Z kolei patrząc na drugi szereg, czyli spermutowany szereg anharmoniczny, widzimy pierwsze trzy wyrazy o sumie 5/6, a następujące dalej wyrazy można połączyć w trójki o dodatniej sumie. Płynie stąd wniosek, że suma tego szeregu jest większa od 5/6.

Pozornie wygląda to na sprzeczność, bo dodajemy te same wyrazy, a otrzymujemy różne sumy. Ale przecież przemienność dodawania dotyczy skończenia wielu składników, a w szeregu składników jest nieskończenie wiele. Być może nie można beztrudno zmieniać kolejności wyrazów szeregu. Tę kwestię wyjaśnię dogłębnie jutro, a na razie zajmijmy się szeregiem harmonicznym i podaną wyżej jego permutacją.

348. Zakładając, że $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = S$ obliczyć sumę permutacji szeregu anharmonicznego, w której na przemian występują dwa wyrazy dodatnie i jeden ujemny:

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{6} + \frac{1}{13} + \frac{1}{15} - \frac{1}{8} + \frac{1}{17} + \frac{1}{19} - \frac{1}{10} + \frac{1}{21} + \frac{1}{23} - \frac{1}{12} + \dots$$

Wskazówka: Obliczyć sumę częściową $3n$ początkowych wyrazów i wyłączyć z niej sumę częściową szeregu anharmonicznego.

Zanim zajrzysz na kolejną stronę, rozwiąż powyższe zadanie, a przynajmniej podejmij próbę rozwiązania, aby wiedzieć, gdzie napotkasz trudności.

¹Permutacją danego szeregu nazywamy każdy szereg, który ma te same wyrazy, ale być może występujące w innej kolejności.

Rozwiązanie:

Sposób I:

Ponieważ wyrazy szeregu dążą do zera, jego zbieżność (i sumę) można zbadać rozważając tylko co trzecią sumę częściową. Otrzymujemy²

$$S_{3n} = \sum_{i=1}^{2n} \frac{1}{2i-1} - \sum_{i=1}^n \frac{1}{2i} = \sum_{i=1}^{2n} \frac{(-1)^{i+1}}{i} + \sum_{i=n+1}^{2n} \frac{1}{2i-1}.$$

Skoro zakładamy, że $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = S$, definicja zbieżności szeregu daje

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{2n} \frac{(-1)^{i+1}}{i} = S.$$

Ponadto oznaczając $f(x) = 1/(2x)$ otrzymujemy³

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=n+1}^{2n} \frac{1}{2i-1} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=n+1}^{2n} \frac{1}{(2i-1)/n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=n+1}^{2n} f\left(\frac{i-1/2}{n}\right) = \int_1^2 f(x) dx = \\ &= \int_1^2 \frac{dx}{2x} = \frac{\ln|x|}{2} \Big|_{x=1}^2 = \frac{\ln 2}{2} - \frac{\ln 1}{2} = \frac{\ln 2}{2}. \end{aligned}$$

Ostatecznie

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_{3n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{i=1}^{2n} \frac{(-1)^{i+1}}{i} + \sum_{i=n+1}^{2n} \frac{1}{2i-1} \right) = S + \frac{\ln 2}{2}.$$

Odpowiedź:

Suma danego szeregu jest równa $S + \frac{\ln 2}{2}$.

A teraz inny sposób rozwiązania – dość trudno na niego wpaść, ale przynajmniej prześledź, że to też działa. I nie wymaga żadnych całek i sum Riemanna.

²Jeśli brak Ci biegłości w operowaniu sumami zapisanymi przy pomocy $\sum$, zapisz każdą sumę występującą w przedstawionych rachunkach "z kropczkami", aby wyobrazić sobie, jakie składniki w niej występują.

³Korzystamy tu ze wzoru: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=n+1}^{2n} f\left(\frac{i-1/2}{n}\right) = \int_1^2 f(x) dx$. Wzór ten przedstawia całkę po przedziale $[1, 2]$ jako granicę ciągu sum całkowych Riemanna odpowiadających podziałowi przedziału $[1, 2]$ na n przedziałików równej długości i wzięciu wartości funkcji f w środku każdego z przedziałików podziału. Jeśli ten wzór wygląda dla Ciebie zbyt abstrakcyjnie, weź $n = 5$, wypisz pięć składników sumy Riemanna $\sum_{i=6}^{10} \frac{1}{5} f\left(\frac{i-1/2}{5}\right)$ i zinterpretuj je na rysunku jako pola prostokątów wystawionych na przedziałach podziału do wysokości wartości funkcji w środku każdego przedziałika.

Sposób II:

Ponieważ wyrazy szeregu dążą do zera, jego zbieżność (i sumę) można zbadać rozwiązując tylko co trzecią sumę częściową. Otrzymujemy⁴

$$\begin{aligned} S_{3n} &= \sum_{i=1}^{2n} \frac{1}{2i-1} - \sum_{i=1}^n \frac{1}{2i} = \sum_{i=1}^{2n} \frac{1}{2i-1} - 2 \cdot \sum_{i=1}^n \frac{1}{4i} = \sum_{i=1}^{2n} \frac{1}{2i-1} - \sum_{i=1}^n \frac{1}{4i} - \sum_{i=1}^n \frac{1}{4i} = \\ &= \sum_{i=1}^{2n} \frac{1}{2i-1} - \sum_{i=1}^n \frac{1}{4i} - \sum_{i=1}^n \frac{1}{4i-2} + \sum_{i=1}^n \frac{1}{4i-2} - \sum_{i=1}^n \frac{1}{4i} = \sum_{i=1}^{2n} \frac{1}{2i-1} - \sum_{i=1}^n \frac{1}{2i} + \sum_{i=1}^{2n} \frac{(-1)^{i+1}}{2i} = \\ &= \sum_{i=1}^{4n} \frac{(-1)^{i+1}}{i} + \frac{1}{2} \cdot \sum_{i=1}^{2n} \frac{(-1)^{i+1}}{i}, \end{aligned}$$

co przy $n \rightarrow \infty$ dąży do $\frac{3}{2} \cdot \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^{i+1}}{i} = \frac{3 \cdot S}{2}$.

Odpowiedź:

Suma danego szeregu jest równa $\frac{3 \cdot S}{2}$.

Rozwiązując zadanie dwoma sposobami otrzymaliśmy dwie odpowiedzi różnej postaci: $S + \frac{\ln 2}{2}$ oraz $\frac{3 \cdot S}{2}$. Ponieważ obie te liczby muszą być równe, otrzymujemy stąd $S = \ln 2$.

Zapamiętaj:

Suma szeregu anharmonicznego jest równa $\ln 2$.

Na razie wygląda to na wynik wyciągnięty z kapelusza, ale niedługo poznamy powody, dla których suma szeregu anharmonicznego jest właśnie taka.

349. Wiedząc, że $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \ln 2$, obliczyć sumę permutacji szeregu anharmonicznego, w której na przemian występują trzy wyrazy dodatnie i jeden ujemny:

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{2} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{4} + \frac{1}{13} + \frac{1}{15} + \frac{1}{17} - \frac{1}{6} + \frac{1}{19} + \frac{1}{21} + \frac{1}{23} - \frac{1}{8} + \frac{1}{25} + \frac{1}{27} + \frac{1}{29} - \frac{1}{10} + \dots$$

Zanim zajrzysz na kolejną stronę, rozwiąż powyższe zadanie, a przynajmniej podejmij próbę rozwiązania, aby wiedzieć, gdzie napotkasz trudności.

⁴Bardzo uważnie sprawdź, że

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{4i} + \sum_{i=1}^n \frac{1}{4i-2} = \sum_{i=1}^{2n} \frac{1}{2i},$$

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{4i-2} - \sum_{i=1}^n \frac{1}{4i} = \sum_{i=1}^{2n} \frac{(-1)^{i+1}}{2i}$$

oraz

$$\sum_{i=1}^{2n} \frac{1}{2i-1} - \sum_{i=1}^{2n} \frac{1}{2i} = \sum_{i=1}^{4n} \frac{(-1)^{i+1}}{i}.$$

Rozwiązanie:

Ponieważ wyrazy szeregu dążą do zera, jego zbieżność (i sumę) można zbadać rozważając tylko co czwartą sumę częściową. Otrzymujemy

$$S_{4n} = \sum_{i=1}^{3n} \frac{1}{2i-1} - \sum_{i=1}^n \frac{1}{2i} = \sum_{i=1}^{2n} \frac{(-1)^{i+1}}{i} + \sum_{i=n+1}^{3n} \frac{1}{2i-1}.$$

Skoro wiemy, że $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \ln 2$, definicja zbieżności szeregu daje

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{2n} \frac{(-1)^{i+1}}{i} = \ln 2.$$

Ponadto oznaczając $f(x) = 1/(2x)$ otrzymujemy

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=n+1}^{3n} \frac{1}{2i-1} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=n+1}^{3n} \frac{1}{(2i-1)/n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=n+1}^{3n} f\left(\frac{i-1/2}{n}\right) = \int_1^3 f(x) dx = \\ &= \int_1^3 \frac{dx}{2x} = \frac{\ln|x|}{2} \Big|_{x=1}^3 = \frac{\ln 3}{2} - \frac{\ln 1}{2} = \frac{\ln 3}{2}. \end{aligned}$$

Ostatecznie

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_{4n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{i=1}^{2n} \frac{(-1)^{i+1}}{i} + \sum_{i=n+1}^{3n} \frac{1}{2i-1} \right) = \ln 2 + \frac{\ln 3}{2}.$$

Odpowiedź: Suma danego szeregu jest równa $\ln 2 + \frac{\ln 3}{2}$.

350. Wiedząc, że $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \ln 2$ obliczyć sumę permutacji szeregu anharmonicznego, w której na przemian występuje 100 wyrazów dodatnich i jeden ujemny:

$$\begin{aligned} &\frac{1}{1} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{199} - \frac{1}{2} + \frac{1}{201} + \frac{1}{203} + \dots + \frac{1}{399} - \frac{1}{4} + \frac{1}{401} + \frac{1}{403} + \dots + \frac{1}{599} - \frac{1}{6} + \\ &+ \frac{1}{601} + \frac{1}{603} + \dots + \frac{1}{799} - \frac{1}{8} + \frac{1}{801} + \frac{1}{803} + \dots + \frac{1}{999} - \frac{1}{10} + \frac{1}{1001} + \frac{1}{1003} + \dots \end{aligned}$$

Zanim zajrzysz na kolejną stronę, rozwiąż powyższe zadanie, a przynajmniej podejmij próbę rozwiązania, aby wiedzieć, gdzie napotykasz trudności.

Rozwiązanie:

Ponieważ wyrazy szeregu dążą do zera, jego zbieżność (i sumę) można zbadać rozważając tylko co 101-szą sumę częściową. Otrzymujemy

$$S_{101n} = \sum_{i=1}^{100n} \frac{1}{2i-1} - \sum_{i=1}^n \frac{1}{2i} = \sum_{i=1}^{2n} \frac{(-1)^{i+1}}{i} + \sum_{i=n+1}^{100n} \frac{1}{2i-1}.$$

Skoro wiemy, że $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \ln 2$, definicja zbieżności szeregu daje

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{2n} \frac{(-1)^{i+1}}{i} = \ln 2.$$

Ponadto oznaczając $f(x) = 1/(2x)$ otrzymujemy

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=n+1}^{100n} \frac{1}{2i-1} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=n+1}^{100n} \frac{1}{(2i-1)/n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=n+1}^{100n} f\left(\frac{i-1/2}{n}\right) = \int_1^{100} f(x) dx = \\ &= \int_1^{100} \frac{dx}{2x} = \frac{\ln|x|}{2} \Big|_{x=1}^{100} = \frac{\ln 100}{2} - \frac{\ln 1}{2} = \frac{\ln 100}{2} = \ln 10. \end{aligned}$$

Ostatecznie

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_{101n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{i=1}^{2n} \frac{(-1)^{i+1}}{i} + \sum_{i=n+1}^{100n} \frac{1}{2i-1} \right) = \ln 2 + \ln 10 = \ln 20.$$

Odpowiedź: Suma danego szeregu jest równa $\ln 20 \approx 2,9957$.

A jutro wyczerpująca odpowiedź na pytanie:

Jak to jest z permutowaniem szeregów?