

Dzień 27 (piątek 24 kwietnia 2020)**Jak to jest z permutowaniem szeregów?**

Wczoraj wyliczyliśmy sumę szeregu anharmonicznego oraz trzech jego permutacji:

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \frac{1}{9} - \frac{1}{10} + \frac{1}{11} - \frac{1}{12} + \frac{1}{13} + \dots = \ln 2 \approx \mathbf{0,6931}$$

$$1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{6} + \frac{1}{13} + \frac{1}{15} - \frac{1}{8} + \frac{1}{17} + \frac{1}{19} - \frac{1}{10} + \dots = \frac{3\ln 2}{2} \approx \mathbf{1,0397}$$

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{2} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{4} + \frac{1}{13} + \frac{1}{15} + \frac{1}{17} - \frac{1}{6} + \frac{1}{19} + \frac{1}{21} + \frac{1}{23} + \dots = \ln 2 + \frac{\ln 3}{2} \approx \mathbf{1,2425}$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{1} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{199} - \frac{1}{2} + \frac{1}{201} + \frac{1}{203} + \dots + \frac{1}{399} - \frac{1}{4} + \frac{1}{401} + \frac{1}{403} + \dots + \frac{1}{599} - \frac{1}{6} + \\ & + \frac{1}{601} + \frac{1}{603} + \dots + \frac{1}{799} - \frac{1}{8} + \frac{1}{801} + \frac{1}{803} + \dots + \frac{1}{999} - \frac{1}{10} + \frac{1}{1001} + \frac{1}{1003} + \dots = \ln 20 \approx \mathbf{2,9957} \end{aligned}$$

Każda z tych czterech permutacji prowadzi do innej sumy. Czyli jest źle. Jak źle? Ano tak źle, że gorzej już być nie może. Okazuje się bowiem, że można z góry zadać liczbę rzeczywistą, a znajdzie się permutacja szeregu anharmonicznego o sumie równej tej właśnie zadanej liczbie. Chcecie tak spermutować szereg anharmoniczny, aby otrzymać szereg zbieżny o sumie $\sqrt{2}$? Proszę uprzejmie.

Pokażę, jak stworzyć taką permutację. Przede wszystkim umówmy się, że nie będziemy zmieniać wzajemnej kolejności wyrazów dodatnich, jak również zachowamy kolejność wyrazów ujemnych. Czyli tak: wyrazy dodatnie dajemy na jedną kupkę:

$$1, \quad \frac{1}{3}, \quad \frac{1}{5}, \quad \frac{1}{7}, \quad \frac{1}{9}, \quad \frac{1}{11}, \quad \frac{1}{13}, \quad \frac{1}{15}, \quad \frac{1}{17}, \quad \frac{1}{19}, \quad \frac{1}{21}, \quad \frac{1}{23}, \quad \dots$$

a wyrazy ujemne na drugą:

$$-\frac{1}{2}, \quad -\frac{1}{4}, \quad -\frac{1}{6}, \quad -\frac{1}{8}, \quad -\frac{1}{10}, \quad -\frac{1}{12}, \quad -\frac{1}{14}, \quad -\frac{1}{16}, \quad -\frac{1}{18}, \quad -\frac{1}{20}, \quad -\frac{1}{22}, \quad -\frac{1}{24}, \quad \dots$$

Konstrukcja permutacji szeregu będzie polegała na odpowiednim dobieraniu wyrazów raz z jednej, raz z drugiej kupki. Przy tym odnotujmy, że każda z dwóch kupek zawiera nieskończenie wiele wyrazów o nieskończonej sumie¹. Zauważmy też, że uszczuplenie którejkolwiek kupki o skończenie wiele wyrazów nie narusza tej własności: nadal będzie tam nieskończenie wiele wyrazów o nieskończonej sumie.

¹A precyzyjniej: w przypadku drugiej kupki suma jest równa minus nieskończoności. Ale darujmy sobie ten minus, aby nie komplikować sformułowań – chyba rozumiemy, że jak kupka zawiera same wyrazy ujemne, to mówienie o ich nieskończonej sumie jest w gruncie rzeczy uproszonym wyrażeniem tego, że ich suma jest minus nieskończonością.

Naszym celem jest skonstruowanie szeregu o sumie $\sqrt{2} \approx 1,41421$. Startujemy od zerowej sumy częściowej $S_0 = 0$, która jest mniejsza od $\sqrt{2}$. Wobec tego wybieramy tyle² wyrazów dodatnich, aby odpowiednia suma częściowa przekroczyła $\sqrt{2}$. Tak się składa, że taki efekt uzyskamy po uwzględnieniu trzech wyrazów dodatnich:

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} \approx 1,53333 > 1,41421.$$

Teraz dobieramy tyle wyrazów ujemnych, aby zejść z sumą częściową poniżej $\sqrt{2}$. Okazuje się, że wystarczy wziąć jeden wyraz:

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{2} \approx 1,03333 < 1,41421.$$

Następnie dobieramy wyrazy dodatnie, aby suma częściowa weszła powyżej $\sqrt{2}$:

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{2} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} + \frac{1}{13} \approx 1,45513 > 1,41421.$$

I wyrazami ujemnymi zjeżdżamy z sumą częściową poniżej $\sqrt{2}$:

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{2} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} + \frac{1}{13} - \frac{1}{4} \approx 1,20513 < 1,41421.$$

I tak dalej i tak dalej. Jak to wygląda w praktyce możesz prześledzić na następnej stronie, gdzie wypisane są kolejne bloki wyrazów dodatnich/ujemnych oraz skumulowane sumy częściowe.

Ponieważ zarówno wyrazy dodatnie, jak i wyrazy ujemne mają nieskończone sumy, zawsze będziemy mieli dość "paliwa", aby jeździć z sumą częściową w górę i w dół tak daleko, jak tylko chcemy. A ponieważ wyrazy szeregu dążą do zera, dalekie sumy częściowe będą bardzo bliskie $\sqrt{2}$, bo nigdy nie odjeżdżamy od $\sqrt{2}$ dalej niż jest to wymuszone skwantowaniem naszych ruchów³.

Oczywiście nigdzie nie korzystałem ze szczególnych własności $\sqrt{2}$, równie dobrze mogłem wziąć jakąkolwiek inną liczbę rzeczywistą.

Morał z tego jest taki, jak wcześniej zapowiedziałem: Permutując wyrazy szeregu anharmonicznego możemy uzyskać szereg zbieżny o dowolnie zadanej sumie. Czy naprawdę jest aż tak źle? Ależ skąd, jest jeszcze gorzej. Ponieważ mamy dość paliwa, aby z sumami częściowymi jeździć w te i w te, możemy zrealizować także inne scenariusze manipulowania sumami częściowymi poprzez odpowiednie dozowanie wyrazów dodatnich/ujemnych:

- Jedziemy w górę powyżej 1, robimy krok w dół, jedziemy w górę powyżej 2, krok w dół, w górę powyżej 3 i tak dalej. Dostajemy szereg rozbieżny do nieskończoności.

- Jedziemy w górę powyżej π , w dół poniżej e , w górę powyżej π , w dół poniżej e , w górę powyżej π , w dół poniżej e i tak dalej. Dostajemy szereg rozbieżny, którego sumy częściowe oscylują między e i π .

- Trzeci scenariusz na stronie 221.

²Tu i wszędzie dalej wybieramy możliwie najmniej wyrazów – wybieranie wyrazów dodatnich przerywamy po pierwszym wyrazie, który spowoduje przekroczenie $\sqrt{2}$.

³Nasze ruchy są skwantowane, bo dodajemy od razu całe wyrazy szeregu.

$$\begin{aligned}
& 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} \approx 1,53333 \\
& \quad - \frac{1}{2} \approx 1,03333 \\
& + \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} + \frac{1}{13} \approx 1,45513 \\
& \quad - \frac{1}{4} \approx 1,20513 \\
& + \frac{1}{15} + \frac{1}{17} + \frac{1}{19} + \frac{1}{21} \approx 1,43087 \\
& \quad - \frac{1}{6} \approx 1,26421 \\
& + \frac{1}{23} + \frac{1}{25} + \frac{1}{27} + \frac{1}{29} \approx 1,41921 \\
& \quad - \frac{1}{8} \approx 1,29421 \\
& + \frac{1}{31} + \frac{1}{33} + \frac{1}{35} + \frac{1}{37} + \frac{1}{39} \approx 1,43801 \\
& \quad - \frac{1}{10} \approx 1,33801 \\
& + \frac{1}{41} + \frac{1}{43} + \frac{1}{45} + \frac{1}{47} \approx 1,42915 \\
& \quad - \frac{1}{12} \approx 1,34582 \\
& + \frac{1}{49} + \frac{1}{51} + \frac{1}{53} + \frac{1}{55} \approx 1,42288 \\
& \quad - \frac{1}{14} \approx 1,35146 \\
& + \frac{1}{57} + \frac{1}{59} + \frac{1}{61} + \frac{1}{63} \approx 1,41821 \\
& \quad - \frac{1}{16} \approx 1,35571 \\
& + \frac{1}{65} + \frac{1}{67} + \frac{1}{69} + \frac{1}{71} \approx 1,41460 \\
& \quad - \frac{1}{18} \approx 1,35905 \\
& + \frac{1}{73} + \frac{1}{75} + \frac{1}{77} + \frac{1}{79} + \frac{1}{81} \approx 1,42407 \\
& \quad - \frac{1}{20} \approx 1,37407 \\
& + \frac{1}{83} + \frac{1}{85} + \frac{1}{87} + \frac{1}{89} \approx 1,42061 \\
& \quad - \frac{1}{22} \approx 1,37516 \\
& + \frac{1}{91} + \frac{1}{93} + \frac{1}{95} + \frac{1}{97} \approx 1,41774 \\
& \quad - \frac{1}{24} \approx 1,37607 \\
& + \frac{1}{99} + \frac{1}{101} + \frac{1}{103} + \frac{1}{105} \approx 1,41530 \\
& \quad - \frac{1}{26} \approx 1,37684 \\
& + \frac{1}{107} + \frac{1}{109} + \frac{1}{111} + \frac{1}{113} + \frac{1}{115} \approx 1,42192 \\
& \quad - \frac{1}{28} \approx 1,38620 \\
& + \frac{1}{117} + \frac{1}{119} + \frac{1}{121} + \frac{1}{123} \approx 1,41955 \\
& \quad - \frac{1}{30} \approx 1,38621 \\
& + \frac{1}{125} + \frac{1}{127} + \frac{1}{129} + \frac{1}{131} \approx 1,41747 \\
& \quad - \frac{1}{32} \approx 1,38622 \\
& + \frac{1}{133} + \frac{1}{135} + \frac{1}{137} + \frac{1}{139} \approx 1,41564 \\
& \quad - \frac{1}{34} \approx 1,38623 \\
& + \frac{1}{141} + \frac{1}{143} + \frac{1}{145} + \frac{1}{147} + \frac{1}{149} \approx 1,42073 \\
& \quad - \frac{1}{36} \approx 1,39295
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{151} + \frac{1}{153} + \frac{1}{155} + \frac{1}{157} \approx 1,41893 \\
& \quad - \frac{1}{38} \approx 1,39261 \\
& + \frac{1}{159} + \frac{1}{161} + \frac{1}{163} + \frac{1}{165} \approx 1,41731 \\
& \quad - \frac{1}{40} \approx 1,39231 \\
& + \frac{1}{167} + \frac{1}{169} + \frac{1}{171} + \frac{1}{173} \approx 1,41584 \\
& \quad - \frac{1}{42} \approx 1,39203 \\
& + \frac{1}{175} + \frac{1}{177} + \frac{1}{179} + \frac{1}{181} \approx 1,41451 \\
& \quad - \frac{1}{44} \approx 1,39178 \\
& + \frac{1}{183} + \frac{1}{185} + \frac{1}{187} + \frac{1}{189} + \frac{1}{191} \approx 1,41852 \\
& \quad - \frac{1}{46} \approx 1,39679 \\
& + \frac{1}{193} + \frac{1}{195} + \frac{1}{197} + \frac{1}{199} \approx 1,41720 \\
& \quad - \frac{1}{48} \approx 1,39636 \\
& + \frac{1}{201} + \frac{1}{203} + \frac{1}{205} + \frac{1}{207} \approx 1,41597 \\
& \quad - \frac{1}{50} \approx 1,39597 \\
& + \frac{1}{209} + \frac{1}{211} + \frac{1}{213} + \frac{1}{215} \approx 1,41484 \\
& \quad - \frac{1}{52} \approx 1,39561 \\
& + \frac{1}{217} + \frac{1}{219} + \frac{1}{221} + \frac{1}{223} + \frac{1}{225} \approx 1,41824 \\
& \quad - \frac{1}{54} \approx 1,39972 \\
& + \frac{1}{227} + \frac{1}{229} + \frac{1}{231} + \frac{1}{233} \approx 1,41712 \\
& \quad - \frac{1}{56} \approx 1,39926 \\
& + \frac{1}{235} + \frac{1}{237} + \frac{1}{239} + \frac{1}{241} \approx 1,41607 \\
& \quad - \frac{1}{58} \approx 1,39882 \\
& + \frac{1}{243} + \frac{1}{245} + \frac{1}{247} + \frac{1}{249} \approx 1,41509 \\
& \quad - \frac{1}{60} \approx 1,39842 \\
& + \frac{1}{251} + \frac{1}{253} + \frac{1}{255} + \frac{1}{257} + \frac{1}{259} \approx 1,41803 \\
& \quad - \frac{1}{62} \approx 1,40190 \\
& + \frac{1}{261} + \frac{1}{263} + \frac{1}{265} + \frac{1}{267} \approx 1,41705 \\
& \quad - \frac{1}{64} \approx 1,40143 \\
& + \frac{1}{269} + \frac{1}{271} + \frac{1}{273} + \frac{1}{275} \approx 1,41614 \\
& \quad - \frac{1}{66} \approx 1,40098 \\
& + \frac{1}{277} + \frac{1}{279} + \frac{1}{281} + \frac{1}{283} \approx 1,41527 \\
& \quad - \frac{1}{68} \approx 1,40056 \\
& + \frac{1}{285} + \frac{1}{287} + \frac{1}{289} + \frac{1}{291} \approx 1,41445 \\
& \quad - \frac{1}{70} \approx 1,40017 \\
& + \frac{1}{293} + \frac{1}{295} + \frac{1}{297} + \frac{1}{299} + \frac{1}{301} \approx 1,41701 \\
& \quad - \frac{1}{72} \approx 1,40312
\end{aligned}$$

• Jedziemy w górę powyżej 1, w dół poniżej -2 , w górę powyżej 3, w dół poniżej -4 , w górę powyżej 5, w dół poniżej -6 i tak dalej. Dostajemy szereg rozbieżny, którego sumy częściowe wariują między $-\infty$ i $+\infty$ – ciąg sum częściowych jest nieograniczony z dołu i nieograniczony z góry.

Wniosek: Permutując wyrazy szeregu anharmonicznego możemy uzyskać szereg zbieżny o dowolnie zadanej sumie albo szereg rozbieżny, przy czym ta rozbieżność może mieć praktycznie dowolny charakter.

Wniosek 2: Nigdzie nie korzystaliśmy z tego, że szereg jest akurat szeregiem anharmonicznym. Istotnie było to, że wyrazy dodatnie mają niekończoną sumę i wyrazy ujemne mają nieskończoną sumę.

Teraz kilka definicji (starych i nowych):

Szereg zbieżny bezwzględnie: Szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest bezwzględnie zbieżny, jeśli szereg $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ jest zbieżny.

Szereg zbieżny względnie⁴: Szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest względnie zbieżny, jeśli jest on zbieżny, ale szereg $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ jest rozbieżny.

Szereg zbieżny bezwarunkowo: Szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest bezwarunkowo zbieżny, jeśli jest zbieżny i każda jego permutacja jest szeregiem zbieżnym mającym tę samą sumę co on.

Szereg zbieżny warunkowo: Szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest warunkowo zbieżny, jeśli jest zbieżny, ale nie każda jego permutacja jest szeregiem zbieżnym mającym tę samą sumę co on.

Okazuje się, że w zakresie szeregów liczbowych zbieżność bezwzględna jest równoważna zbieżności bezwarunkowej, a więc w konsekwencji zbieżność względna jest równoważna zbieżności warunkowej.

Innymi słowy: **Jeśli szereg jest zbieżny bezwzględnie, to możemy beztrąsko zmieniać kolejność jego wyrazów, a on pozostanie zbieżny i jego suma się nie zmieni.**

Jeśli natomiast szereg jest zbieżny, ale nie bezwzględnie, to permutując jego wyrazy możemy uzyskać szereg zbieżny o dowolnej sumie albo szereg rozbieżny⁵.

⁴Używam tu określenia "względnej zbieżności", bo pozwala ono na zgrabne sformułowanie tej definicji, ale nie jest to nazwa szeroko stosowana. Mniej wątpliwości budzi trochę toporne, ale lepiej zrozumiałe określenie "szereg zbieżny, ale nie bezwzględnie".

⁵Jest to twierdzenie Riemanna o szeregach warunkowo zbieżnych.

I w zasadzie na tym można byłoby zakończyć, ale pojawia się naturalne pytanie: skoro zbieżność bezwzględna to jest to samo, co zbieżność bezwarunkowa, a zbieżność względna jest tym samym, co zbieżność warunkowa, to w imię jakiej szczytnej idei funkcjonuje tu podwójne nazewnictwo? I tak w praktyce wybieramy formy zgrabniejsze: szereg zbieżny bezwzględnie oraz szereg zbieżny warunkowo.

Pamiętacie z pierwszego semestru warunek Cauchy'ego zbieżności ciągu? Warunek ten jest równoważny zbieżności ciągu, ale...

No właśnie, jest tu jakieś "ale". Gdyby rozważać zbieżność ciągów i warunek Cauchy'ego w bardziej abstrakcyjnych przestrzeniach⁶, to okazałoby się, że każdy ciąg zbieżny jest ciągiem Cauchy'ego⁷, ale w drugą stronę to już różnie bywa. Jako przykład podałem Wam świat liczb wymiernych, gdzie warunek Cauchy'ego nie wymusza zbieżności, bo np. ciąg liczb wymiernych zbieżny do $\sqrt{2}$ spełnia w tym świecie warunek Cauchy'ego, ale nie jest zbieżny, bo nie ma w świecie liczb wymiernych liczby, która byłaby jego granicą. Z tym wiąże się własność przestrzeni metrycznych zwana zupełnością⁸.

Podobnie rzecz się ma z wymienionymi wyżej rodzajami zbieżności. Można powiedzieć tak: W każdej sytuacji szereg zbieżny bezwzględnie jest bezwarunkowo zbieżny. Ale w drugą stronę to już różnie bywa, jeśli wejdziemy w bardziej abstrakcyjne teorie matematyczne.

Wyobraźcie sobie nieskończenie wymiarową przestrzeń euklidesową⁹. Myślcie o takiej przestrzeni euklidesowej, gdzie jest nieskończenie wiele osi, a każdy wektor ma nieskończenie wiele współrzędnych. Z twierdzenia Pitagorasa wynika, że długość wektora to pierwiastek z sumy kwadratów jego współrzędnych, a ponieważ chcemy, aby długości wektorów, czy też odległości między punktami były skończone, wymagamy skończoności sumy kwadratów współrzędnych.

W tejże przestrzeni mamy szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e_n}{n}$, gdzie e_n jest wersorem n -tej osi¹⁰.

Odpowiednikiem szeregu wartości bezwzględnych wyrazów jest szereg długości wektorów będących jego wyrazami. Ponieważ wektor $\frac{e_n}{n}$ ma długość $\frac{1}{n}$, szereg długości¹¹ wektorów-wyrazów szeregu jest szeregiem harmonicznym, a więc rozbieżnym. Tak więc szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e_n}{n}$ uchodzi za szereg zbieżny, ale nie bezwzględnie. Tymczasem jest on zbieżny bezwarunkowo, bo jego wyrazy można beztrudno permutować i zawsze dostaniemy szereg zbieżny o sumie będącej wektorem $\left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \dots\right)$. A to dlatego, że każdy wyraz tego szeregu żyje na innej współrzędnej i nie wchodzi w drogę innym wyrazom.

⁶Konkretnie chodzi tu o przestrzeń metryczną.

⁷Czyli spełniającym warunek Cauchy'ego.

⁸Z definicji: przestrzeń metryczna jest zupełna wtedy i tylko wtedy, gdy każdy ciąg Cauchy'ego jest zbieżny.

⁹Jest to, mówiąc w uproszczeniu, przestrzeń Hilberta.

¹⁰Czyli wektorem jednostkowym w kierunku tej osi – ma on n -tą współrzędną równą 1, a pozostałe współrzędne zerowe.

¹¹Fachowo nazywa się to normą wektora.