

Dzień 28 (poniedziałek 27 kwietnia 2020)**Szeregi potęgowe**

Szeregiem potęgowym nazywamy każdy szereg postaci¹

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots,$$

gdzie współczynniki $a_0, a_1, a_2, a_3, \dots$ są dowolnymi liczbami rzeczywistymi. Można powiedzieć, że szereg potęgowy to taki wielomian² o nieskończonej liczbie składników.

Taki szereg potęgowy ma trzy oblicza.

Oblicze pierwsze: czysto formalistyczne. Szereg potęgowy możemy traktować jako pewien napis, czyli formalne wyrażenie i na takich wyrażeniach możemy chcieć wykonywać różne operacje. Tym się zajmować nie będziemy, bo to raczej domena algebry niż analizy.

Oblicze drugie to traktowanie szeregu potęgowego jako szeregu liczbowego z parametrem x . Tym właśnie w początkowej fazie studiowania szeregów potęgowych się zajmujemy.

I wreszcie oblicze trzecie: traktowanie szeregu potęgowego jako szeregu funkcyjnego, czyli zobaczenie w wyrazach oraz sumie szeregu nie liczb, ale funkcji. To jest oblicze najbardziej interesujące z punktu widzenia analizy i do tego właśnie zmierzamy.

Zgodnie z zapowiedzią zacznijmy od potraktowania szeregu potęgowego jako szeregu liczbowego z parametrem x . Problem, jaki nas interesuje, to wyznaczenie zbioru wszystkich x , dla których szereg jest zbieżny, czyli obszaru³ zbieżności szeregu. Przykłady, które podam, nie będą zbyt finezyjne, bo chodzi mi o pokazanie pewnych zjawisk, a nie o zakopanie się w rachunkach.

Poczyńmy najpierw spostrzeżenie, że dla $x = 0$ każdy szereg potęgowy jest zbieżny, albowiem wszystkie jego wyrazy poza ewentualnie a_0 są równe 0.

¹Tak naprawdę to szeregiem potęgowym często nazywa się szereg

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n = a_0 + a_1 (x - x_0) + a_2 (x - x_0)^2 + a_3 (x - x_0)^3 + \dots,$$

gdzie x_0 jest ustaloną liczbą rzeczywistą. I w razie potrzeby bądźmy gotowi do rozważenia szeregu takiej właśnie postaci. Ale jeśli chcemy nauczyć się badać szeregi potęgowe, to możemy dla uproszczenia przyjąć $x_0 = 0$. Nie wpłynie to na istotę zachodzących zjawisk.

²Tak jak w przypadku wielomianu przyjmujemy, że $x^0 = 1$ nie przejmując się, że dla $x = 0$ otrzymamy wyrażenie nieoznaczone 0^0 .

³Określenie "obszar zbieżności" jest tymczasowe. Docelowo będziemy używać innego określenia, ale nie sposób go w tej chwili wprowadzić nie zdradzając obserwacji, które wkrótce mamy poczynić.

Przykład 1: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$.

Jak już przed chwilą zauważyliśmy, dla $x=0$ szereg jest zbieżny, a w przypadku $x \neq 0$ możemy zastosować kryterium d'Alemberta⁴:

$$\left| \frac{x^{n+1} \cdot n!}{(n+1)! \cdot x^n} \right| = \frac{|x|}{n+1} \rightarrow 0 < 1,$$

zatem szereg jest zbieżny dla każdego x . Obszarem zbieżności jest więc cały zbiór liczb rzeczywistych, który możemy zapisać jako przedział $(-\infty, +\infty)$.

Przykład 2: $\sum_{n=0}^{\infty} n! \cdot x^n$.

Dla $x=0$ szereg jest zbieżny, a w przypadku $x \neq 0$ stosujemy kryterium d'Alemberta:

$$\left| \frac{(n+1)! \cdot x^{n+1}}{n! \cdot x^n} \right| = (n+1) \cdot |x| \rightarrow \infty > 1,$$

zatem szereg jest rozbieżny dla każdego $x \neq 0$. Obszarem zbieżności jest więc zbiór jednoelementowy złożony z zera.

Przykład 3: $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$.

Szereg jest szeregiem geometrycznym o ilorazie x , jest więc zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy $|x| < 1$. Zatem obszarem zbieżności tego szeregu jest przedział $(-1, 1)$.

Przykład 4: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n \cdot 2^n}$.

Zastosowanie kryterium d'Alemberta⁵ w przypadku $x \neq 0$ prowadzi do:

$$\left| \frac{x^{n+1} \cdot n \cdot 2^n}{(n+1) \cdot 2^{n+1} \cdot x^n} \right| = \frac{|x|}{2} \cdot \frac{n}{n+1} \rightarrow \frac{|x|}{2} \begin{cases} < 1 & \text{dla } |x| < 2 \\ > 1 & \text{dla } |x| > 2 \end{cases}$$

Stąd wniosek, że szereg jest zbieżny w przedziale $(-2, 2)$, a rozbieżny poza przedziałem $[-2, 2]$. Do rozstrzygnięcia pozostaje zbieżność szeregu dla $x = \pm 2$. Przyjrzyjmy się szeregowi w tych dwóch punktach:

Dla $x=2$ otrzymujemy $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n \cdot 2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$. Jest to szereg rozbieżny jako szereg harmoniczny.

Dla $x=-2$ otrzymujemy $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n \cdot 2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$. Jest to szereg zbieżny jako szereg anharmoniczny⁶.

Podsumowując: Obszarem zbieżności danego szeregu jest przedział $[-2, 2)$.

⁴Jak to w kryterium d'Alemberta bywa, zapisujemy iloraz kolejnych dwóch wyrazów szeregu i po jego ewentualnym przekształceniu przechodzimy do granicy przy $n \rightarrow \infty$ pamiętając, aby x traktować jako parametr. Otrzymaną granicę porównujemy z jedynką i na podstawie tego porównania wnioskujemy o zbieżności lub rozbieżności szeregu.

⁵W tym wypadku można też zastosować kryterium Cauchy'ego, pod warunkiem, że pamiętamy o $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

⁶Formalnie jest to minus szereg anharmoniczny.

Przykład 5: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2 \cdot 3^n}$.

Zastosowanie kryterium d'Alemberta w przypadku $x \neq 0$ prowadzi do:

$$\left| \frac{x^{n+1} \cdot n^2 \cdot 3^n}{(n+1)^2 \cdot 3^{n+1} \cdot x^n} \right| = \frac{|x|}{3} \cdot \left(\frac{n}{n+1} \right)^2 \rightarrow \frac{|x|}{3} \begin{cases} < 1 & \text{dla } |x| < 3 \\ > 1 & \text{dla } |x| > 3 \end{cases}$$

Stąd wniosek, że szereg jest zbieżny w przedziale $(-3, 3)$, a rozbieżny poza przedziałem $[-3, 3]$. Do rozstrzygnięcia pozostaje zbieżność szeregu dla $x = \pm 3$. Przyjrzyjmy się szeregowi w tych dwóch punktach:

Dla $x = \pm 3$ otrzymujemy $\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{x^n}{n^2 \cdot 3^n} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty$, skąd wynika, że dany szereg jest bezwzględnie zbieżny.

Podsumowując: Obszarem zbieżności danego szeregu jest przedział $[-3, 3]$.

Przykład 6: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n} \cdot (-4)^n}$.

Zastosowanie kryterium d'Alemberta w przypadku $x \neq 0$ prowadzi do:

$$\left| \frac{x^{n+1} \cdot \sqrt{n} \cdot (-4)^n}{\sqrt{n+1} \cdot (-4)^{n+1} \cdot x^n} \right| = \frac{|x|}{4} \cdot \sqrt{\frac{n}{n+1}} \rightarrow \frac{|x|}{4} \begin{cases} < 1 & \text{dla } |x| < 4 \\ > 1 & \text{dla } |x| > 4 \end{cases}$$

Stąd wniosek, że szereg jest zbieżny w przedziale $(-4, 4)$, a rozbieżny poza przedziałem $[-4, 4]$. Do rozstrzygnięcia pozostaje zbieżność szeregu dla $x = \pm 4$. Przyjrzyjmy się szeregowi w tych dwóch punktach:

Dla $x = 4$ otrzymujemy $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n} \cdot (-4)^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$. Jest to szereg zbieżny jako szereg naprzemienny spełniający założenia kryterium Leibniza.

Dla $x = -4$ otrzymujemy $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n} \cdot (-4)^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$. Jest to szereg rozbieżny jako szereg postaci $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ z $p = 1/2 \leq 1$.

Podsumowując: Obszarem zbieżności danego szeregu jest przedział $(-4, 4]$.

Jakie spostrzeżenie nasuwa się z powyższych przykładów? Otóż w każdym rozważanym przykładzie obszarem zbieżności jest przedział, co nie jest wcale oczywiste, bo można sobie wyobrazić, że obszar zbieżności składałby się z kilku kawałków. Co więcej, w rozważanych przykładach przedział ten jest prawie symetryczny względem zera — symetria bywa łamana tylko przez przynależność końców przedziału do obszaru zbieżności.

Okazuje się, że to nie jest przypadek. Każdy szereg potęgowy ma obszar zbieżności będący przedziałem i dlatego będziemy mówili o **przedziale zbieżności**. Przedział ten może być całą prostą rzeczywistą, może degenerować się do zbioru złożonego z zera, a może też być przedziałem jednej z czterech postaci:

$$(-R, R), \quad [-R, R], \quad (-R, R], \quad [-R, R).$$

W tym wypadku liczbę R będziemy nazywać promieniem⁷ zbieżności szeregu potęgowego. Możemy też mówić o $R = \infty$ w przypadku szeregu zbieżnego na całej prostej oraz o $R = 0$ w przypadku szeregu rozbieżnego wszędzie poza zerem.

Przez kolejne dwa dni poćwiczymy sobie wyznaczanie przedziału lub promienia⁸ zbieżności różnych szeregów potęgowych, a potem przejdziemy do tego, co w analizie najciekawsze — w wyrazach szeregu potęgowego oraz w jego sumie będziemy dostrzegać funkcje.

Uwaga 1:

Przedział zbieżności szeregu potęgowego

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n = a_0 + a_1 (x - x_0) + a_2 (x - x_0)^2 + a_3 (x - x_0)^3 + \dots$$

jest całą prostą rzeczywistą, zbiorem $\{x_0\}$ lub jest jednej z czterech postaci:

$$(x_0 - R, x_0 + R), \quad [x_0 - R, x_0 + R], \quad (x_0 - R, x_0 + R], \quad [x_0 - R, x_0 + R).$$

Uwaga 2:

Jeśli szereg potęgowy ma dużo wyrazów zerowych, to możemy go zapisać w postaci sumy, w której zerowe wyrazy są pominięte, a numerowanie obejmuje wyrazy niezerowe. Na przykład szereg potęgowy

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n,$$

gdzie $a_n = 1$ dla n parzystych oraz $a_n = 0$ dla n nieparzystych, wygodniej jest zapisać jako

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^{2n}.$$

⁷Skąd nazwa promień? W maju to sobie wyjaśnimy, a na razie musi to pozostać zagadką.

⁸Samego promienia zbieżności szukamy wtedy, gdy nie zależy nam na badaniu szeregu potęgowego na końcach przedziału zbieżności lub gdy rozstrzygnięcie zbieżności na końcach przedziału zbieżności jest zbyt trudne.