

Dzień 29 (wtorek 28 kwietnia 2020)

**Szeregi potęgowe:
wyznacznice przedziału lub promienia zbieżności**

371. Wyznaczyć promień zbieżności szeregu potęgowego $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n \cdot \binom{2n}{n} \cdot x^n}{n!}$.

Zanim zajrzysz na kolejną stronę, rozwiąż powyższe zadanie, a przynajmniej podejmij próbę rozwiązania, aby wiedzieć, gdzie napotykasz trudności.

Rozwiązanie:

Stosujemy kryterium d'Alemberta do danego szeregu traktowanego jako szereg liczbowy z parametrem $x \neq 0$.

Otrzymujemy

$$\begin{aligned} \left| \frac{(n+1)^{n+1} \cdot \binom{2n+2}{n+1} \cdot x^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{n^n \cdot \binom{2n}{n} \cdot x^n} \right| &= \left| \frac{(n+1) \cdot \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \cdot x \cdot \binom{2n+2}{n+1}}{(n+1)} \cdot \frac{1}{\binom{2n}{n}} \right| = \\ &= \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \cdot |x| \cdot \frac{(2n+1) \cdot (2n+2)}{(n+1) \cdot (n+1)} \rightarrow 4e \cdot |x| \end{aligned}$$

przy $n \rightarrow \infty$.

Tak więc zastosowanie kryterium d'Alemberta prowadzi do granicy ilorazów kolejnych wyrazów szeregu równej $4e \cdot |x|$.

Jeżeli $4e \cdot |x| < 1$, czyli $|x| < \frac{1}{4e}$, to szereg jest zbieżny.

Jeżeli zaś $4e \cdot |x| > 1$, czyli $|x| > \frac{1}{4e}$, to szereg jest rozbieżny.

Stąd wniosek, że promień zbieżności danego szeregu potęgowego jest równy $\frac{1}{4e}$.

Odpowiedź: Dany w zadaniu szereg potęgowy ma promień zbieżności $\frac{1}{4e}$.

372. Wyznaczyć promień zbieżności szeregu potęgowego $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n \cdot \binom{3n}{n} \cdot x^n}{n!}$.

Zanim zajrzysz na kolejną stronę, rozwiąż powyższe zadanie, a przynajmniej podejmij próbę rozwiązania, aby wiedzieć, gdzie napotykasz trudności.

Rozwiązanie:

Stosujemy kryterium d'Alemberta do danego szeregu traktowanego jako szereg liczbowy z parametrem $x \neq 0$.

Otrzymujemy

$$\begin{aligned} \left| \frac{(n+1)^{n+1} \cdot \binom{3n+3}{n+1} \cdot x^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{n^n \cdot \binom{3n}{n} \cdot x^n} \right| &= \left| \frac{(n+1) \cdot \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \cdot x \cdot \binom{3n+3}{n+1}}{(n+1) \cdot \binom{3n}{n}} \right| = \\ &= \left(\frac{n+1}{n} \right)^n \cdot |x| \cdot \frac{(3n+1) \cdot (3n+2) \cdot (3n+3)}{(n+1) \cdot (2n+1) \cdot (2n+2)} \rightarrow \frac{27e \cdot |x|}{4} \end{aligned}$$

przy $n \rightarrow \infty$.

Tak więc zastosowanie kryterium d'Alemberta prowadzi do granicy ilorazów kolejnych wyrazów szeregu równej $\frac{27e \cdot |x|}{4}$.

Jeżeli $\frac{27e \cdot |x|}{4} < 1$, czyli $|x| < \frac{4}{27e}$, to szereg jest zbieżny.

Jeżeli zaś $\frac{27e \cdot |x|}{4} > 1$, czyli $|x| > \frac{4}{27e}$, to szereg jest rozbieżny.

Stąd wniosek, że promień zbieżności danego szeregu potęgowego jest równy $\frac{4}{27e}$.

Odpowiedź: Dany w zadaniu szereg potęgowy ma promień zbieżności $\frac{4}{27e}$.

373. Wyznaczyć promień zbieżności szeregu potęgowego

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3n)! \cdot x^n}{(2n)! \cdot n^n}. \quad (1)$$

Zanim zajrzysz na kolejną stronę, rozwiąż powyższe zadanie, a przynajmniej podejmij próbę rozwiązania, aby wiedzieć, gdzie napotykasz trudności.

Rozwiązanie:

Stosujemy kryterium d'Alemberta do szeregu (1) traktowanego jako szereg liczbowy z parametrem $x \neq 0$.

Otrzymujemy

$$\left| \frac{(3n+3)! \cdot x^{n+1}}{(2n+2)! \cdot (n+1)^{n+1}} \cdot \frac{(2n)! \cdot n^n}{(3n)! \cdot x^n} \right| = \frac{(3n+1) \cdot (3n+2) \cdot (3n+3) \cdot |x|}{(2n+1) \cdot (2n+2) \cdot \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \cdot (n+1)} \rightarrow \frac{27 \cdot |x|}{4 \cdot e}$$

przy $n \rightarrow \infty$.

Tak więc zastosowanie kryterium d'Alemberta prowadzi do granicy ilorazów kolejnych wyrazów szeregu (1) równej $\frac{27 \cdot |x|}{4 \cdot e}$.

Jeżeli $\frac{27 \cdot |x|}{4 \cdot e} < 1$, czyli $|x| < \frac{4e}{27}$, to szereg (1) jest zbieżny.

Jeżeli zaś $\frac{27 \cdot |x|}{4 \cdot e} > 1$, czyli $|x| > \frac{4e}{27}$, to szereg (1) jest rozbieżny.

Stąd wniosek, że promień zbieżności szeregu potęgowego (1) jest równy $\frac{4e}{27}$.

Odpowiedź: Dany w zadaniu szereg potęgowy ma promień zbieżności $\frac{4e}{27}$.

374. Wyznaczyć promień zbieżności szeregu potęgowego

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)! \cdot x^{2n}}{n! \cdot n^n}. \quad (2)$$

Zanim zajrzysz na kolejną stronę, rozwiąż powyższe zadanie, a przynajmniej podejmij próbę rozwiązania, aby wiedzieć, gdzie napotykasz trudności.

Rozwiązanie:

Stosujemy kryterium d'Alemberta do szeregu (2) traktowanego jako szereg liczbowy z parametrem $x \neq 0$.

Otrzymujemy

$$\begin{aligned} \left| \frac{(2n+2)! \cdot x^{2n+2}}{(n+1)! \cdot (n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n! \cdot n^n}{(2n)! \cdot x^{2n}} \right| &= \\ &= \frac{(2n+1) \cdot (2n+2) \cdot |x|^2}{(n+1) \cdot \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \cdot (n+1)} = \\ &= \frac{2 \cdot (2n+1)}{n+1} \cdot \frac{x^2}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n} \rightarrow 4 \cdot \frac{x^2}{e}. \end{aligned}$$

Tak więc zastosowanie kryterium d'Alemberta prowadzi do granicy ilorazów kolejnych wyrazów szeregu (2) równej $4 \cdot \frac{x^2}{e}$.

Jeżeli $4 \cdot \frac{x^2}{e} < 1$, czyli $|x| < \frac{\sqrt{e}}{2}$, to szereg (2) jest zbieżny.

Jeżeli zaś $4 \cdot \frac{x^2}{e} > 1$, czyli $|x| > \frac{\sqrt{e}}{2}$, to szereg (2) jest rozbieżny.

Stąd wniosek, że promień zbieżności szeregu potęgowego (2) jest równy $\frac{\sqrt{e}}{2}$.

Odpowiedź: Dany w zadaniu szereg potęgowy ma promień zbieżności $\frac{\sqrt{e}}{2}$.

375. Wyznaczyć promień zbieżności szeregu potęgowego

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(4n)! \cdot x^{2n}}{(2n)! \cdot n! \cdot n^n}. \quad (3)$$

Zanim zajrzysz na kolejną stronę, rozwiąż powyższe zadanie, a przynajmniej podejmij próbę rozwiązania, aby wiedzieć, gdzie napotykasz trudności.

Rozwiązanie:

Stosujemy kryterium d'Alemberta do szeregu (3) traktowanego jako szereg liczbowy z parametrem $x \neq 0$.

Otrzymujemy

$$\begin{aligned} & \left| \frac{(4n+4)! \cdot x^{2n+2}}{(2n+2)! \cdot (n+1)! \cdot (n+1)^{n+1}} \cdot \frac{(2n)! \cdot n! \cdot n^n}{(4n)! \cdot x^{2n}} \right| = \\ &= \frac{(4n+1) \cdot (4n+2) \cdot (4n+3) \cdot (4n+4) \cdot x^2}{(2n+1) \cdot (2n+2) \cdot (n+1) \cdot \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \cdot (n+1)} \rightarrow \frac{64 \cdot x^2}{e} \end{aligned}$$

przy $n \rightarrow \infty$.

Tak więc zastosowanie kryterium d'Alemberta prowadzi do granicy ilorazów kolejnych wyrazów szeregu (3) równej $\frac{64 \cdot x^2}{e}$.

Jeżeli $\frac{64 \cdot x^2}{e} < 1$, czyli $|x| < \frac{\sqrt{e}}{8}$, to szereg (3) jest zbieżny.

Jeżeli zaś $\frac{64 \cdot x^2}{e} > 1$, czyli $|x| > \frac{\sqrt{e}}{8}$, to szereg (3) jest rozbieżny.

Stąd wniosek, że promień zbieżności szeregu potęgowego (3) jest równy $\frac{\sqrt{e}}{8}$.

Odpowiedź: Dany w zadaniu szereg potęgowy ma promień zbieżności $\frac{\sqrt{e}}{8}$.

376. Wyznaczyć promień zbieżności szeregu potęgowego

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n \cdot \binom{3n}{n} \cdot x^{3n}}{n! \cdot 2^n}. \quad (4)$$

Zanim zajrzysz na kolejną stronę, rozwiąż powyższe zadanie, a przynajmniej podejmij próbę rozwiązania, aby wiedzieć, gdzie napotykasz trudności.

Rozwiązanie:

Stosujemy kryterium d'Alemberta do szeregu (4) traktowanego jako szereg liczbowy z parametrem $x \neq 0$.

Otrzymujemy

$$\begin{aligned} \left| \frac{(n+1)^{n+1} \cdot \binom{3n+3}{n+1} \cdot x^{3n+3}}{(n+1)! \cdot 2^{n+1}} \cdot \frac{n! \cdot 2^n}{n^n \cdot \binom{3n}{n} \cdot x^{3n}} \right| &= \left| \frac{(n+1) \cdot \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \cdot x^3 \cdot \binom{3n+3}{n+1}}{(n+1) \cdot 2} \cdot \frac{1}{\binom{3n}{n}} \right| = \\ &= \frac{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n \cdot |x|^3}{2} \cdot \frac{(3n+1) \cdot (3n+2) \cdot (3n+3)}{(n+1) \cdot (2n+1) \cdot (2n+2)} \rightarrow \frac{27e \cdot |x|^3}{8} \end{aligned}$$

przy $n \rightarrow \infty$.

Tak więc zastosowanie kryterium d'Alemberta prowadzi do granicy ilorazów kolejnych wyrazów szeregu (4) równej $\frac{27e \cdot |x|^3}{8}$.

Jeżeli $\frac{27e \cdot |x|^3}{8} < 1$, czyli $|x| < \frac{2}{3 \cdot \sqrt[3]{e}}$, to szereg (4) jest zbieżny.

Jeżeli zaś $\frac{27e \cdot |x|^3}{8} > 1$, czyli $|x| > \frac{2}{3 \cdot \sqrt[3]{e}}$, to szereg (4) jest rozbieżny.

Stąd wniosek, że promień zbieżności szeregu potęgowego (4) jest równy $\frac{2}{3 \cdot \sqrt[3]{e}}$.

Odpowiedź: Dany w zadaniu szereg potęgowy ma promień zbieżności $\frac{2}{3 \cdot \sqrt[3]{e}}$.

377. Wyznaczyć promień zbieżności szeregu potęgowego

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\binom{2n}{n} \cdot (2n)! \cdot x^{4n}}{n! \cdot n^n}. \quad (5)$$

Zanim zajrzysz na kolejną stronę, rozwiąż powyższe zadanie, a przynajmniej podejmij próbę rozwiązania, aby wiedzieć, gdzie napotykasz trudności.

Rozwiązanie:

Stosujemy kryterium d'Alemberta do szeregu (5) traktowanego jako szereg liczbowy z parametrem $x \neq 0$.

Otrzymujemy

$$\begin{aligned} & \left| \frac{\binom{2n+2}{n+1} \cdot (2n+2)! \cdot x^{4n+4}}{(n+1)! \cdot (n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n! \cdot n^n}{\binom{2n}{n} \cdot (2n)! \cdot x^{4n}} \right| = \\ &= \frac{\binom{2n+2}{n+1}}{\binom{2n}{n}} \cdot \frac{(2n+1) \cdot (2n+2) \cdot |x|^4}{(n+1) \cdot \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \cdot (n+1)} = \\ &= \frac{2 \cdot (2n+1)}{n+1} \cdot \frac{2 \cdot (2n+1)}{n+1} \cdot \frac{x^4}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n} \rightarrow 16 \cdot \frac{x^4}{e}. \end{aligned}$$

Tak więc zastosowanie kryterium d'Alemberta prowadzi do granicy ilorazów kolejnych wyrazów szeregu (5) równej $16 \cdot \frac{x^4}{e}$.

Jeżeli $16 \cdot \frac{x^4}{e} < 1$, czyli $|x| < \frac{\sqrt[4]{e}}{2}$, to szereg (5) jest zbieżny.

Jeżeli zaś $16 \cdot \frac{x^4}{e} > 1$, czyli $|x| > \frac{\sqrt[4]{e}}{2}$, to szereg (5) jest rozbieżny.

Stąd wniosek, że promień zbieżności szeregu potęgowego (5) jest równy $\frac{\sqrt[4]{e}}{2}$.

Odpowiedź: Dany w zadaniu szereg potęgowy ma promień zbieżności $\frac{\sqrt[4]{e}}{2}$.

378. Wyznaczyć promień zbieżności szeregu potęgowego

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n \cdot \binom{2n}{n}^3 \cdot x^{5n}}{n! \cdot 2^n}. \quad (6)$$

Zanim zajrzysz na kolejną stronę, rozwiąż powyższe zadanie, a przynajmniej podejmij próbę rozwiązania, aby wiedzieć, gdzie napotykasz trudności.

Rozwiązanie:

Stosujemy kryterium d'Alemberta do szeregu (6) traktowanego jako szereg liczbowy z parametrem $x \neq 0$.

Otrzymujemy

$$\begin{aligned} \left| \frac{(n+1)^{n+1} \cdot \binom{2n+2}{n+1}^3 \cdot x^{5n+5}}{(n+1)! \cdot 2^{n+1}} \cdot \frac{n! \cdot 2^n}{n^n \cdot \binom{2n}{n}^3 \cdot x^{5n}} \right| &= \left| \frac{(n+1) \cdot \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \cdot x^5}{(n+1) \cdot 2} \cdot \frac{\binom{2n+2}{n+1}^3}{\binom{2n}{n}^3} \right| = \\ &= \frac{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n \cdot |x|^5}{2} \cdot \frac{(2n+1)^3 \cdot (2n+2)^3}{(n+1)^3 \cdot (n+1)^3} \rightarrow 32e \cdot |x|^5 \end{aligned}$$

przy $n \rightarrow \infty$.

Tak więc zastosowanie kryterium d'Alemberta prowadzi do granicy ilorazów kolejnych wyrazów szeregu (6) równej $32e \cdot |x|^5$.

Jeżeli $32e \cdot |x|^5 < 1$, czyli $|x| < \frac{1}{2 \cdot \sqrt[5]{e}}$, to szereg (6) jest zbieżny.

Jeżeli zaś $32e \cdot |x|^5 > 1$, czyli $|x| > \frac{1}{2 \cdot \sqrt[5]{e}}$, to szereg (6) jest rozbieżny.

Stąd wniosek, że promień zbieżności szeregu potęgowego (6) jest równy $\frac{1}{2 \cdot \sqrt[5]{e}}$.

Odpowiedź: Dany w zadaniu szereg potęgowy ma promień zbieżności $\frac{1}{2 \cdot \sqrt[5]{e}}$.