

Dzień 30 (środa 29 kwietnia 2020)**Szeregi potęgowe:
wyznacznice przedziału lub promienia zbieżności**

379. Rozstrzygnąć zbieżność szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^{n^2} \cdot \binom{2n}{n}^n \cdot n^{n^2}}{(n!)^n}$$

w zależności od parametru rzeczywistego dodatniego a . Dla jednej wartości a można nie udzielić odpowiedzi.

Zanim zajrzysz na kolejną stronę, rozwiąż powyższe zadanie, a przynajmniej podejmij próbę rozwiązania, aby wiedzieć, gdzie napotykasz trudności.

Rozwiązanie:

Stosujemy kryterium Cauchy'ego do danego w zadaniu szeregu:

$$\sqrt[n]{\frac{a^{n^2} \cdot \binom{2n}{n}^n \cdot n^{n^2}}{(n!)^n}} = \frac{a^n \cdot \binom{2n}{n} \cdot n^n}{n!} = b_n.$$

Następnie stosujemy kryterium d'Alemberta do ciągu (b_n) :

$$\begin{aligned} \frac{b_{n+1}}{b_n} &= \frac{a^{n+1} \cdot \binom{2n+2}{n+1} \cdot (n+1)^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{a^n \cdot \binom{2n}{n} \cdot n^n} = \frac{a \cdot (2n+1) \cdot (2n+2) \cdot (n+1)}{(n+1)^2 \cdot (n+1)} \cdot \left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \\ &= \frac{a \cdot (2n+1) \cdot 2}{(n+1)} \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \rightarrow 4ea \end{aligned}$$

przy $n \rightarrow \infty$.

Jeżeli $4e \cdot a < 1$, czyli $a < 1/4e$, to na podstawie kryterium d'Alemberta zastosowanego do ciągu (b_n) wnioskujemy, że

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0 < 1,$$

wobec czego w oparciu o kryterium Cauchy'ego zastosowane do szeregu danego w treści zadania wnioskujemy, że szereg ten jest zbieżny.

Jeżeli zaś $4e \cdot a > 1$, czyli $a > 1/4e$, to $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = +\infty > 1$, skąd wynika, że szereg jest rozbieżny.

Odpowiedź:

Dany szereg jest zbieżny dla liczb dodatnich $a < \frac{1}{4e}$, a rozbieżny dla $a > \frac{1}{4e}$.

380. Wyznaczyć promień zbieżności szeregu potęgowego

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{n^2} \cdot x^{n^2}}{(n!)^n}. \quad (1)$$

Zanim zajrzysz na kolejną stronę, rozwiąż powyższe zadanie, a przynajmniej podejmij próbę rozwiązania, aby wiedzieć, gdzie napotykasz trudności.

Rozwiązanie:

Stosujemy kryterium Cauchy'ego do szeregu (1) traktowanego jako szereg liczbowy z parametrem x .

Otrzymujemy

$$\sqrt[n]{\left| \frac{n^{n^2} \cdot x^{n^2}}{(n!)^n} \right|} = \frac{n^n \cdot |x|^n}{n!} = b_n.$$

Następnie stosujemy kryterium d'Alemberta do ciągu (b_n) :

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{(n+1)^{n+1} \cdot |x|^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{n^n \cdot |x|^n} = \frac{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n \cdot (n+1) \cdot |x|}{n+1} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \cdot |x| \rightarrow e \cdot |x|.$$

Tak więc zastosowanie kryterium d'Alemberta prowadzi do granicy ilorazów kolejnych wyrazów ciągu (b_n) równej $e \cdot |x|$.

Jeżeli $e \cdot |x| < 1$, czyli $|x| < \frac{1}{e}$, to ciąg (b_n) jest zbieżny do $0 < 1$, a w konsekwencji szereg (1) jest zbieżny.

Jeżeli zaś $e \cdot |x| > 1$, czyli $|x| > \frac{1}{e}$, to ciąg (b_n) jest rozbieżny do $+\infty > 1$, a w konsekwencji szereg (1) jest rozbieżny.

Stąd wniosek, że promień zbieżności szeregu potęgowego (1) jest równy $\frac{1}{e}$.

Odpowiedź: Dany w zadaniu szereg potęgowy ma promień zbieżności $\frac{1}{e}$.

381. Wyznaczyć przedział zbieżności szeregu potęgowego

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n^3}}{(n!)^n}.$$

Zanim zajrzysz na kolejną stronę, rozwiąż powyższe zadanie, a przynajmniej podejmij próbę rozwiązania, aby wiedzieć, gdzie napotykasz trudności.

Rozwiązanie:

Zastosujmy kryterium Cauchy'ego do zbadania zbieżności danego szeregu. Otrzymujemy

$$\sqrt[n]{\left|\frac{x^{n^3}}{(n!)^n}\right|} = \frac{|x|^{n^2}}{n!} = b_n.$$

Ponieważ nie umiemy od razu stwierdzić, do czego dąży b_n przy $n \rightarrow \infty$, stosujemy kryterium d'Alemberta, tym razem do **ciągu** (b_n) . Otrzymujemy

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{|x|^{2n+1}}{n+1} = c_n.$$

Jeżeli nie umiemy od razu stwierdzić, do czego dąży c_n przy $n \rightarrow \infty$, stosujemy ponownie kryterium d'Alemberta, tym razem do **ciągu** (c_n) . Otrzymujemy

$$\frac{c_{n+1}}{c_n} = x^2 \cdot \frac{n+1}{n+2} \rightarrow x^2$$

przy $n \rightarrow \infty$.

Jeżeli $|x| < 1$, czyli $x^2 < 1$, to z kryterium d'Alemberta zastosowanego do ciągu (c_n) wynika, że $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = 0 < 1$.

Z kryterium d'Alemberta zastosowanego do ciągu (b_n) wynika, że $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0 < 1$. Także dla $x = \pm 1$ otrzymujemy $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} = 0 < 1$.

Wobec tego z kryterium Cauchy'ego zastosowanego do danego szeregu potęgowego wynika, że jest on zbieżny.

Jeżeli $|x| > 1$, czyli $x^2 > 1$, to z kryterium d'Alemberta zastosowanego do ciągu (c_n) wynika, że $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = +\infty > 1$.

Z kryterium d'Alemberta zastosowanego do ciągu (b_n) wynika, że $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = +\infty > 1$.

Wobec tego z kryterium Cauchy'ego zastosowanego do danego szeregu potęgowego wynika, że jest on rozbieżny.

Odpowiedź: Przedziałem zbieżności danego szeregu potęgowego jest $[-1, 1]$.

382. Wyznaczyć promień zbieżności szeregu potęgowego

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{n^4} \cdot x^{n^4}}{(n!)^{n^3}}. \quad (2)$$

Zanim zajrzysz na kolejną stronę, rozwiąż powyższe zadanie, a przynajmniej podejmij próbę rozwiązania, aby wiedzieć, gdzie napotykasz trudności.

Rozwiązanie:

Oznaczmy n -ty wyraz szeregu (2) traktowanego jako szereg liczbowy z parametrem x przez a_n i zastosujmy do niego kryterium Cauchy'ego. Otrzymujemy

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \sqrt[n]{\left| \frac{n^{n^4} \cdot x^{n^4}}{(n!)^{n^3}} \right|} = \frac{n^{n^3} \cdot |x|^{n^3}}{(n!)^{n^2}} = b_n.$$

W celu obliczenia granicy ciągu (b_n) stosujemy kryterium Cauchy'ego do tego ciągu. Otrzymujemy

$$\sqrt[n]{b_n} = \sqrt[n]{\frac{n^{n^3} \cdot |x|^{n^3}}{(n!)^{n^2}}} = \frac{n^{n^2} \cdot |x|^{n^2}}{(n!)^n} = c_n.$$

W celu obliczenia granicy ciągu (c_n) stosujemy kryterium Cauchy'ego do tego ciągu. Otrzymujemy

$$\sqrt[n]{c_n} = \sqrt[n]{\frac{n^{n^2} \cdot |x|^{n^2}}{(n!)^n}} = \frac{n^n \cdot |x|^n}{n!} = d_n.$$

W celu obliczenia granicy ciągu (d_n) w przypadku $x \neq 0$ stosujemy kryterium d'Alemberta do tego ciągu. Otrzymujemy

$$\frac{d_{n+1}}{d_n} = \frac{(n+1)^{n+1} \cdot |x|^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{n^n \cdot |x|^n} = |x| \cdot \left(\frac{n+1}{n} \right)^n \rightarrow e \cdot |x|$$

przy $n \rightarrow \infty$.

Tak więc zastosowanie kryterium d'Alemberta prowadzi do granicy ilorazów kolejnych wyrazów ciągu (d_n) równej $e \cdot |x|$.

Jeżeli $e \cdot |x| < 1$, czyli $|x| < 1/e$, to na mocy kryterium d'Alemberta

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d_n = 0 < 1,$$

skąd na mocy kryterium Cauchy'ego zastosowanego do ciągu (c_n) mamy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = 0 < 1,$$

skąd na mocy kryterium Cauchy'ego zastosowanego do ciągu (b_n) dostajemy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0 < 1,$$

skąd na mocy kryterium Cauchy'ego zastosowanego do szeregu (2) wnioskujemy, że szereg ten jest zbieżny.

Jeżeli zaś $e \cdot |x| > 1$, czyli $|x| > 1/e$, to na mocy kryterium d'Alemberta

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d_n = +\infty > 1,$$

skąd na mocy kryterium Cauchy'ego zastosowanego do ciągu (c_n) mamy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = +\infty > 1,$$

skąd na mocy kryterium Cauchy'ego zastosowanego do ciągu (b_n) dostajemy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = +\infty > 1,$$

skąd na mocy kryterium Cauchy'ego zastosowanego do szeregu (2) wnioskujemy, że szereg ten jest rozbieżny.

Zatem promień zbieżności szeregu potęgowego (2) jest równy $1/e$.

Odpowiedź: Dany w zadaniu szereg potęgowy ma promień zbieżności $1/e$.

383. Wyznaczyć promień zbieżności szeregu potęgowego

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)! \cdot (4n)! \cdot x^{pn}}{n! \cdot n^{pn}} \quad (3)$$

dla tak dobranej wartości całkowitej dodatniej parametru p , aby promień ten był dodatni i skończony.

Zanim zajrzysz na kolejną stronę, rozwiąż powyższe zadanie, a przynajmniej podejmij próbę rozwiązania, aby wiedzieć, gdzie napotykasz trudności.

Rozwiązanie:

Stosujemy kryterium d'Alemberta do szeregu (3) traktowanego jako szereg liczbowy z parametrem $x \neq 0$.

Otrzymujemy

$$\begin{aligned} & \left| \frac{(2n+2)! \cdot (4n+4)! \cdot x^{pn+p}}{(n+1)! \cdot (n+1)^{pn+p}} \cdot \frac{n! \cdot n^{pn}}{(2n)! \cdot (4n)! \cdot x^{pn}} \right| = \\ &= \frac{(2n+1) \cdot (2n+2) \cdot (4n+1) \cdot (4n+2) \cdot (4n+3) \cdot (4n+4) \cdot |x|^p}{(n+1) \cdot \left(\frac{n+1}{n}\right)^{pn} \cdot (n+1)^p} = \\ &= \frac{8 \cdot (2n+1) \cdot (4n+1) \cdot (4n+2) \cdot (4n+3)}{(n+1)^{p-1}} \cdot \frac{|x|^p}{\left(\left(\frac{n+1}{n}\right)^n\right)^p} \rightarrow 2^{10} \cdot \frac{|x|^p}{e^p} \end{aligned}$$

przy $n \rightarrow \infty$, o ile $p-1=4$, bo tylko w tym przypadku pierwszy czynnik powyższego iloczynu ma granicę rzeczywistą dodatnią.

Tak więc zastosowanie kryterium d'Alemberta prowadzi do granicy ilorazów kolejnych wyrazów szeregu (3) równej $2^{10} \cdot \frac{|x|^5}{e^5}$ dla $p=5$.

Jeżeli $2^{10} \cdot \frac{|x|^5}{e^5} < 1$, czyli $|x| < \frac{e}{4}$, to szereg (3) jest zbieżny.

Jeżeli zaś $2^{10} \cdot \frac{|x|^5}{e^5} > 1$, czyli $|x| > \frac{e}{4}$, to szereg (3) jest rozbieżny.

Stąd wniosek, że promień zbieżności szeregu potęgowego (3) jest równy $\frac{e}{4}$.

Odpowiedź: Dany w zadaniu szereg potęgowy ma dla $p=5$ promień zbieżności $\frac{e}{4}$.

384. Wyznaczyć przedział zbieżności szeregu potęgowego

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+1) \cdot (2n+3) \cdot (2n+5) \cdot (2n+7) \cdot x^n}{n \cdot (n+1) \cdot (n+2) \cdot (n+3) \cdot (n+4)}.$$

Zanim zajrzysz na kolejną stronę, rozwiąż powyższe zadanie, a przynajmniej podejmij próbę rozwiązania, aby wiedzieć, gdzie napotykasz trudności.

Rozwiązanie:

Stosujemy kryterium d'Alemberta do danego szeregu potęgowego traktowanego jako szereg liczbowy z parametrem $x \neq 0$.

Otrzymujemy

$$\left| \frac{(2n+3) \cdot (2n+5) \cdot (2n+7) \cdot (2n+9) \cdot x^{n+1}}{(n+1) \cdot (n+2) \cdot (n+3) \cdot (n+4) \cdot (n+5)} \cdot \frac{n \cdot (n+1) \cdot (n+2) \cdot (n+3) \cdot (n+4)}{(2n+1) \cdot (2n+3) \cdot (2n+5) \cdot (2n+7) \cdot x^n} \right| = \\ = \frac{n \cdot (2n+9) \cdot |x|}{(n+5) \cdot (2n+1)} \rightarrow |x|$$

przy $n \rightarrow \infty$.

Tak więc zastosowanie kryterium d'Alemberta prowadzi do granicy ilorazów kolejnych wyrazów danego szeregu potęgowego równej $|x|$.

Jeżeli $|x| < 1$, to szereg jest zbieżny.

Jeżeli zaś $|x| > 1$, to szereg jest rozbieżny.

Stąd wniosek, że promień zbieżności danego szeregu potęgowego jest równy 1.

Dla $x = 1$ otrzymujemy szereg, który na mocy kryterium porównawczego jest rozbieżny:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+1) \cdot (2n+3) \cdot (2n+5) \cdot (2n+7)}{n \cdot (n+1) \cdot (n+2) \cdot (n+3) \cdot (n+4)} \geq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+0) \cdot (2n+0) \cdot (2n+0) \cdot (2n+0)}{n \cdot (n+n) \cdot (n+2n) \cdot (n+3n) \cdot (n+4n)} = \\ = \frac{1}{15} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty.$$

Dla $x = -1$ otrzymujemy szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+1) \cdot (2n+3) \cdot (2n+5) \cdot (2n+7) \cdot (-1)^n}{n \cdot (n+1) \cdot (n+2) \cdot (n+3) \cdot (n+4)},$$

który jest zbieżny na mocy kryterium Leibniza o szeregach naprzemiennych.

Aby to udowodnić, musimy zweryfikować prawdziwość trzech założeń tego kryterium.

1° W szeregu na przemian występują wyrazy dodatnie i ujemne - oczywiste.

2° Ciąg wartości bezwzględnych wyrazów jest zbieżny do zera.

Sprawdzamy to następująco:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n+1) \cdot (2n+3) \cdot (2n+5) \cdot (2n+7)}{n \cdot (n+1) \cdot (n+2) \cdot (n+3) \cdot (n+4)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(2 + \frac{1}{n}\right) \cdot \left(2 + \frac{3}{n}\right) \cdot \left(2 + \frac{5}{n}\right) \cdot \left(2 + \frac{7}{n}\right) \cdot \frac{1}{n}}{1 \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right) \cdot \left(1 + \frac{2}{n}\right) \cdot \left(1 + \frac{3}{n}\right) \cdot \left(1 + \frac{4}{n}\right)} = \\ = \frac{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 0}{1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1} = 0.$$

3° Ciąg wartości bezwzględnych wyrazów jest nierosnący.

Ten warunek jest najmniej oczywisty. Aby go udowodnić, powinniśmy wykazać, że dla dowolnej liczby naturalnej n zachodzi nierówność

$$\frac{(2n+1) \cdot (2n+3) \cdot (2n+5) \cdot (2n+7)}{n \cdot (n+1) \cdot (n+2) \cdot (n+3) \cdot (n+4)} \geq \frac{(2n+3) \cdot (2n+5) \cdot (2n+7) \cdot (2n+9)}{(n+1) \cdot (n+2) \cdot (n+3) \cdot (n+4) \cdot (n+5)},$$

co kolejno jest równoważne nierównościom

$$\begin{aligned}\frac{2n+1}{n} &\geq \frac{2n+9}{n+5}, \\ (2n+1) \cdot (n+5) &\geq (2n+9) \cdot n, \\ 2n^2 + 11n + 5 &\geq 2n^2 + 9n, \\ 2n + 5 &\geq 0,\end{aligned}$$

skąd wynika, że dowodzona nierówność jest prawdziwa dla każdej liczby naturalnej n .

W konsekwencji szereg dany w treści zadania jest zbieżny dla $x = -1$ na mocy kryterium Leibniza o szeregach naprzemiennych.

Odpowiedź: Dany w zadaniu szereg potęgowy ma przedział zbieżności $[-1, 1)$.

Uwaga: Stosowanie kryterium d'Alemberta nie jest konieczne, ale jego unikanie nie wydaje się specjalnie praktyczne. Można bowiem wyobrazić sobie następujące rozwiązanie:

- Jakimś sposobem zgadujemy, że promień zbieżności jest równy 1.
- Dowodzimy jak w przedstawionym rozwiązaniu, że szereg jest rozbieżny dla $x = 1$ i zbieżny dla $x = -1$.
- Przedstawiamy rozumowanie, z którego wynika, że jeśli szereg jest rozbieżny dla $x = 1$ i zbieżny dla $x = -1$, to jego promień zbieżności jest równy 1.

385. Wyznaczyć przedział zbieżności szeregu potęgowego

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n \cdot 64^n} \cdot x^{3n}}{5n+7}.$$

Zanim zajrzysz na kolejną stronę, rozwiąż powyższe zadanie, a przynajmniej podejmij próbę rozwiązania, aby wiedzieć, gdzie napotkasz trudności.

Rozwiązanie:

Stosujemy kryterium d'Alemberta do danego szeregu potęgowego traktowanego jako szereg liczbowy z parametrem $x \neq 0$.

Otrzymujemy

$$\left| \frac{\sqrt{(n+1) \cdot 64^{n+1}} \cdot x^{3n+3}}{5n+12} \cdot \frac{5n+7}{\sqrt{n \cdot 64^n} \cdot x^{3n}} \right| = \sqrt{\frac{n+1}{n}} \cdot 8 \cdot |x|^3 \cdot \frac{5n+7}{5n+12} \rightarrow 8 \cdot |x|^3$$

przy $n \rightarrow \infty$.

Tak więc zastosowanie kryterium d'Alemberta prowadzi do granicy ilorazów kolejnych wyrazów danego szeregu potęgowego równej $8 \cdot |x|^3$.

Jeżeli $8 \cdot |x|^3 < 1$, czyli $|x| < 1/2$, to szereg jest zbieżny.

Jeżeli zaś $8 \cdot |x|^3 > 1$, czyli $|x| > 1/2$, to szereg jest rozbieżny.

Stąd wniosek, że promień zbieżności danego szeregu potęgowego jest równy $1/2$.

Dla $x = 1/2$ otrzymujemy szereg, który na mocy kryterium porównawczego jest rozbieżny:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{5n+7} \geq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{5n+7n} = \frac{1}{12} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = +\infty.$$

Dla $x = -1/2$ otrzymujemy szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n} \cdot (-1)^n}{5n+7},$$

który jest zbieżny na mocy kryterium Leibniza o szeregach naprzemiennych.

Aby to udowodnić, musimy zweryfikować prawdziwość trzech założeń tego kryterium.

1° W szeregu na przemian występują wyrazy dodatnie i ujemne – oczywiste.

2° Ciąg wartości bezwzględnych wyrazów jest zbieżny do zera.

Sprawdzamy to następująco:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n}}{5n+7} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{n}}}{5 + \frac{7}{n}} = \frac{0}{5+0} = 0.$$

3° Ciąg wartości bezwzględnych wyrazów jest nierosnący.

Ten warunek jest najmniej oczywisty. Aby go udowodnić, powinniśmy wykazać, że dla każdej liczby naturalnej n zachodzi nierówność

$$\frac{\sqrt{n}}{5n+7} \geq \frac{\sqrt{n+1}}{5n+12},$$

co kolejno jest równoważne nierównościom

$$\sqrt{n} \cdot (5n+12) \geq \sqrt{n+1} \cdot (5n+7),$$

$$n \cdot (5n+12)^2 \geq (n+1) \cdot (5n+7)^2,$$

$$n \cdot (25n^2 + 120n + 144) \geq (n+1) \cdot (25n^2 + 70n + 49),$$

$$\begin{aligned}25n^3 + 120n^2 + 144n &\geq 25n^3 + 95n^2 + 119n + 49, \\25n^2 + 25n &\geq 49,\end{aligned}$$

skąd wynika, że dowodzona nierówność jest prawdziwa dla każdej liczby naturalnej n .

W konsekwencji szereg dany w treści zadania jest zbieżny dla $x = -1/2$ na mocy kryterium Leibniza o szeregach naprzemiennych.

Odpowiedź: Dany w zadaniu szereg potęgowy ma przedział zbieżności $[-1/2, 1/2)$.

Uwaga: Stosowanie kryterium d'Alemberta nie jest konieczne, ale jego unikanie nie wydaje się specjalnie praktyczne. Można bowiem wyobrazić sobie następujące rozwiązanie:

- Jakimś sposobem zgadujemy, że promień zbieżności jest równy $1/2$.
- Dowodzimy jak w przedstawionym rozwiązaniu, że szereg jest rozbieżny dla $x = 1/2$ i zbieżny dla $x = -1/2$.
- Przedstawiamy rozumowanie, z którego wynika, że jeśli szereg potęgowy jest rozbieżny dla $x = 1/2$ i zbieżny dla $x = -1/2$, to jego promień zbieżności jest równy $1/2$.

386. Wyznaczyć przedział zbieżności szeregu potęgowego

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(5n+2)^n \cdot x^n}{(7n+3)^n}.$$

Jeśli nie potrafisz, to przynajmniej wyznacz promień zbieżności.

Zanim zajrzysz na kolejną stronę, rozwiąż powyższe zadanie, a przynajmniej podejmij próbę rozwiązania, aby wiedzieć, gdzie napotykasz trudności.

Rozwiązanie:

Zastosujmy kryterium Cauchy'ego do zbadania zbieżności danego w zadaniu szeregu traktowanego jako szereg liczbowy z parametrem x . Otrzymujemy

$$\sqrt[n]{\left| \frac{(5n+2)^n \cdot x^n}{(7n+3)^n} \right|} = \frac{(5n+2) \cdot |x|}{7n+3} \rightarrow \frac{5 \cdot |x|}{7}.$$

Jeżeli $\frac{5 \cdot |x|}{7} < 1$, czyli $|x| < \frac{7}{5}$, to dany w zadaniu szereg jest zbieżny.

Jeżeli zaś $\frac{5 \cdot |x|}{7} > 1$, czyli $|x| > \frac{7}{5}$, to dany w zadaniu szereg jest rozbieżny.

Stąd wniosek, że promień zbieżności szeregu potęgowego jest równy $\frac{7}{5}$.

Pozostaje rozstrzygnąć zbieżność szeregu na końcach przedziału zbieżności, czyli dla $x = \pm 7/5$. W tym przypadku rozważymy ciąg wartości bezwzględnych wyrazów szeregu:

$$\begin{aligned} \left| \frac{(5n+2)^n \cdot x^n}{(7n+3)^n} \right| &= \frac{(5n+2)^n \cdot 7^n}{(7n+3)^n \cdot 5^n} = \frac{(35n+14)^n}{(35n+15)^n} = \left(1 - \frac{1}{35n+15} \right)^n = \\ &= \left(\left(1 - \frac{1}{35n+15} \right)^{35n+15} \right)^{\frac{n}{35n+15}} \rightarrow (e^{-1})^{1/35} = \frac{1}{\sqrt[35]{e}} \neq 0. \end{aligned}$$

Ponieważ wartości bezwzględne wyrazów szeregu dążą do liczby różnej od zera, szereg jest rozbieżny.

Odpowiedź:

Przedziałem zbieżności danego szeregu potęgowego jest przedział $(-7/5, 7/5)$.