

Dzień 32 (poniedziałek 4 maja 2020)**Szeregi potęgowe (c.d.)**

Z wykładu tuż przed majowym weekendem płynie następujący miły¹ wniosek:

**Suma szeregu potęgowego
jest funkcją różniczkowalną
wewnątrz przedziału zbieżności
nieskończenie wiele razy,
a sam szereg można
różniczkować wyraz za wyrazem
dowolnie wiele razy.**

Zastanówmy się teraz nad następującym zagadnieniem: Dany jest szereg potęgowy o dodatnim² promieniu zbieżności R . Znamy funkcję f będącą jego sumą w przedziale³ $(-R, R)$:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

Czy na podstawie znajomości funkcji f możemy odtworzyć szereg potęgowy, którego jest ona sumą?

Okazuje się, że tak. Wystarczy bowiem zauważyć, że skoro szereg można różniczkować wyraz za wyrazem dowolnie wiele razy, to dla każdej liczby całkowitej nieujemnej⁴ k otrzymujemy

$$f^{(k)}(x) = \frac{d^k}{dx^k} f(x) = \frac{d^k}{dx^k} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d^k}{dx^k} a_n x^n = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\dots(n-k+1) a_n x^{n-k},$$

skąd po podstawieniu $x=0$ dostajemy⁵

$$f^{(k)}(0) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\dots(n-k+1) a_n 0^{n-k} = k! \cdot a_k.$$

Wobec tego

$$a_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!}.$$

¹Bo pozwalający na pełną beztróskę.

²Być może nieskończonym.

³Mniejsza o ewentualną zbieżność na końcach — i tak w tym akurat miejscu nie robilibyśmy z niej żadnego użytku.

⁴Dla $k=0$ też się to broni, chociaż wygląda dziwnie. Jednak włączamy ten przypadek do ogólnego schematu dla jednolitości otrzymywanych wzorów.

⁵Pamiętając, że w kontekście wielomianów i szeregów potęgowych $x^0 = 1$, także $0^0 = 1$.

Mamy więc procedurę odtworzenia współczynników szeregu potęgowego na podstawie funkcji będącej jego sumą: współczynnikami tymi są pochodne sumy w zerze podzielone przez odpowiednie silnie.

Aby taka procedura dała się zastosować do funkcji f , wystarczy, aby funkcja f miała w zerze pochodne wszystkich rzędów. Innymi słowy z funkcją f mającą w zerze pochodne wszystkich rzędów możemy związać szereg potęgowy

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n,$$

który jest jedynym kandydatem na szereg potęgowy sumujący się do f . Szereg taki nazywamy szeregiem Taylora⁶ funkcji f .

To teraz naturalne jest pytanie takie: Dana jest funkcja f mająca w zerze pochodne wszystkich rzędów. Możemy stworzyć jej szereg Taylora. Czy wówczas funkcja f jest jego sumą?

Przypomina to trochę prymitywną⁷ sztuczkę, która ma sugerować, że znam na pamięć piątą potęgę liczb jednocyfrowych. Wybierzcie jakąś cyfrę, podnieście ją do piątej potęgi, a ja błyskawicznie powiem, jaką cyfrę wybraлиście. Podaliście 16807? Aha, to jest piąta potęga liczby 7. Na czym polega trik? Otóż cyfra jedności zachowuje się przy podnoszeniu do piątej potęgi. Wobec tego wybraną przez Was cyfrą jest cyfra jedności podanej przez Was piątej potęgi. Tak właśnie wygląda procedura wyciągania pierwiastka piątego stopnia z liczb mniejszych od 100 000 będących piątymi potęgami — w odpowiedzi podajemy cyfrę jedności.

A jeśli podacie mi liczbę 12342? To zgodnie z procedurą odpowiem: To jest piąta potęga liczby 2. Nie działa? No tak, bo procedura pierwiastkowania przez podawanie cyfry jedności daje się zastosować do każdej liczby, i dla każdej liczby daje **jakiś** wynik, ale tylko dla piątych potęg daje wynik zgodny z naszymi oczekiwaniami.

To wzbudza pewien niepokój, jeśli chodzi o szereg Taylora, bo:

Jaką mamy gwarancję, że funkcja jest sumą swojego szeregu Taylora?

⁶Celowo wyraziłem się tu trochę nieprecyzyjnie, żeby nie wprowadzać niepotrzebnych komplikacji. W rzeczywistości mówiąc o szeregu Taylora funkcji f powinniśmy jeszcze dopowiedzieć, w którym punkcie x_0 ten szereg tworzymy (u nas $x_0 = 0$). Wówczas szereg ten ma postać

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n.$$

Ponadto szereg Taylora w zerze (właśnie taki rozpatrujemy) nazywany bywa szeregiem Maclaurina, ale bardziej odpowiada mi używanie tu nazwiska Taylora.

⁷Dla celów ilustracyjnych taka prymitywna sztuczka w zupełności wystarczy. Gdyby ktoś chciał sztuczki poważniejszej, to musiałby się nauczyć piątych potęg liczb jednocyfrowych, co jest równoważne zapamiętaniu piątych potęg dwucyfrowych wielokrotności dziesiątki. Wówczas mógłby znajdować podstawy piątych potęg liczb dwucyfrowych: cyfra jedności podstawy jest cyfrą jedności piątej potęgi, a cyfra dziesiątek podstawy może być określona przez porównanie podanej piątej potęgi z piątymi potęgami wielokrotności dziesiątki.

I właśnie nadszedł czas, aby zburzyć błogi spokój związany z beztróską, z jaką można traktować szeregi potęgowe.

Przypomnijmy przykład z pierwszego semestru:

Przykład:

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & \text{dla } x \neq 0 \\ 0 & \text{dla } x = 0 \end{cases}$$

Przypomnę, że tak zdefiniowana funkcja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ jest nieskończenie wiele razy różniczkowalna na całej prostej, jest dodatnia poza zerem, a w zerze ma pochodne wszystkich rzędów równe 0. Wobec tego jej szereg Taylora jest szeregiem zerowym.

Czyli tak: funkcja jest bardzo porządna⁸, jej szereg Taylora jest świetnie zbieżny⁹, ale suma tego szeregu Taylora nie ma wiele wspólnego z samą funkcją, bo suma szeregu Taylora jest zerowa, a funkcja jest dodatnia poza zerem.

Wobec tego spotkała nas:

Przykrość 1: Suma szeregu Taylora może być różna od funkcji.

Ale to nie koniec złych wieści. Otóż okazuje się, że **każdy szereg potęgowy jest szeregiem Taylora pewnej funkcji**¹⁰. Udowodnienie tego, czy choćby naszkicowanie dowodu, wykracza poza ramy tego wykładu. W każdym razie nawet taki szereg jak znany nam $\sum_{n=0}^{\infty} n!x^n$, który jest rozbieżny wszędzie poza zerem, jest szeregiem Taylora jakiejś funkcji.

Tym samym spotyka nas:

Przykrość 2: Szereg Taylora może być rozbieżny poza zerem.

Podsumowując:

Jeśli funkcja f jest sumą szeregu potęgowego, to szeregiem tym jest jej szereg Taylora. Jeśli zaś weźmiemy jakąkolwiek funkcję f mającą pochodne wszystkich rzędów wokół zera, to jej szereg Taylora może być rozbieżny wszędzie poza zerem, a nawet jak jest zbieżny, to jego suma może mieć niewiele wspólnego z samą funkcją.

Ale nie martwcie się, głowa do góry. Jutro poznamy przykłady funkcji, które jednak są sumami swoich szeregów Taylora i wyjaśnimy sobie, że nie jest to takie rzadkie zjawisko.

⁸Ma nieskończenie wiele pochodnych na całej prostej — chyba lepiej się nie da.

⁹Czy ktoś zna szereg lepiej zbieżny niż szereg zerowy?

¹⁰I to bardzo porządnej, bo nieskończenie wiele razy różniczkowalnej na całej prostej.