

Dzień 33 (wtorek 5 maja 2020)**Szeregi potęgowe (c.d.)**

Przypomnienie: Dla funkcji f mającej w zerze pochodne wszystkich rzędów, jej szeregiem Taylora w zerze (inaczej: szeregiem Maclaurina) nazywamy szereg potęgowy

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n.$$

Jest to jedyny szereg potęgowy, który **może** sumować się do funkcji f w otoczeniu zera. **Może, ale nie musi.**

Gdybyśmy chcieli rozwinąć funkcję f w szereg potęgowy wokół punktu x_0 , w którym f ma pochodne wszystkich rzędów, to jedynym kandydatem jest jej szereg Taylora w x_0 określony wzorem:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n.$$

Jednak dla wygody najczęściej przesuniemy wówczas funkcję f , tzn. rozważymy funkcję $g(x) = f(x + x_0)$ i zajmijmy się szeregiem Taylora funkcji g w zerze.

Dziś kilka przykładów funkcji, ich szeregów Taylora (w zerze) oraz związku tych funkcji z ich szeregami Taylora.

Przykład 1: $f(x) = e^x$

Ponieważ $f^{(n)}(x) = e^x$ oraz $f^{(n)}(0) = 1$, szeregiem Taylora funkcji f w zerze jest szereg

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

Szereg ten jest zbieżny na całej prostej rzeczywistej, ale czy jego sumą jest funkcja f ?

Narzędziem, które tu wykorzystamy, jest wzór Taylora, który przypomnę w wersji ogólnej:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{N-1} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n + R_N(x)$$

oraz szczególnej przy $x_0 = 0$:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{N-1} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n + R_N(x).$$

Składnik $R_N(x)$ jest N -tą resztą wzoru Taylora i odpowiada za błąd, jaki popełniamy przybliżając funkcję f wielomianem. Są różne postacie reszty wzoru Taylora, ale my używaliśmy

$$R_N(x) = \frac{f^{(N)}(x_0 + t_x(x - x_0))}{N!} \cdot (x - x_0)^N \quad t_x \in (0, 1),$$

gdzie argument $x_0 + t_x(x - x_0)$ jest po prostu jakimś punktem pomiędzy x_0 i x .

Dla $x_0 = 0$ mamy prostszą wersję:

$$R_N(x) = \frac{f^{(N)}(t_x \cdot x)}{N!} \cdot x^N \quad t_x \in (0, 1).$$

Nie sposób nie zauważyć, że składniki we wzorze Taylora są identyczne jak w szeregu Taylora. Nie jest to przypadek, wszak jedno i drugie usiłuje zrobić z funkcji wielomian. Wzór Taylora mówi, że funkcję można przybliżyć wielomianem, a za błąd jaki w tym wypadku popełniamy odpowiada reszta wzoru Taylora. Natomiast szereg Taylora jest tymże wielomianem ze wzoru Taylora wysumowanym do nieskończoności, czyli szeregiem potęgowym. W jednym i drugim przypadku współczynniki wielomianu odczytujemy z pochodnych funkcji w punkcie x_0 , gdyż tym najlepszym wielomianem jest wielomian mający takie same pochodne w x_0 jak funkcja f .

Wróćmy do funkcji z rozważanego przykładu. Aby udowodnić, że dla każdego x szereg

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

jest zbieżny do $f(x) = e^x$, trzeba udowodnić, że ciąg sum częściowych

$$\sum_{n=0}^N \frac{x^n}{n!}$$

jest zbieżny do $f(x)$. Ponieważ¹

$$\sum_{n=0}^N \frac{x^n}{n!} = f(x) - R_{N+1}(x),$$

musimy dowieść, że $R_{N+1}(x)$ dąży² do zera. W tym celu trzeba oszacować $|R_{N+1}(x)|$ od góry przez wyrażenie dążące do 0 przy $N \rightarrow \infty$.

Wprawdzie wzór na $R_{N+1}(x)$ jest niezbyt precyzyjny, ale w zupełności wystarczający do oszacowań, jeśli rozumiemy choć trochę jak wyglądają pochodne funkcji f . W naszym przypadku

$$|R_{N+1}(x)| = \left| \frac{f^{(N+1)}(t_x \cdot x)}{(N+1)!} \cdot x^{N+1} \right| = \left| \frac{e^{t_x \cdot x}}{(N+1)!} \cdot x^{N+1} \right| = \frac{e^{t_x \cdot x}}{(N+1)!} \cdot |x|^{N+1} \leq \frac{e^{|x|}}{(N+1)!} \cdot |x|^{N+1}.$$

W oszacowaniach skorzystaliśmy z nierówności

$$t_x \cdot x \leq |t_x \cdot x| = |t_x| \cdot |x| \leq |x|.$$

Przy ustalonym $x \neq 0$ zbieżność ciągu $\left(\frac{e^{|x|}}{(N+1)!} \cdot |x|^{N+1} \right)_{N \in \mathbb{N}}$ do zera dowodzimy korzystając z wersji kryterium d'Alemberta dla ciągów:

$$\frac{\frac{e^{|x|}}{(N+2)!} \cdot |x|^{N+2}}{\frac{e^{|x|}}{(N+1)!} \cdot |x|^{N+1}} = \frac{|x|}{N+2} \rightarrow 0 < 1.$$

Tym samym udowodniliśmy, że szereg Taylora funkcji f jest do niej zbieżny na całej prostej i bez skrepowania możemy zapisać³:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^5}{120} + \frac{x^6}{720} + \frac{x^7}{7!} + \frac{x^8}{8!} + \frac{x^9}{9!} + \frac{x^{10}}{10!} + \dots \quad (\clubsuit)$$

¹ Jest to delikatnie przekształcony wzór Taylora z poprzedniej strony w wersji $x_0=0$ i $N+1$ zamiast N .

² Przy ustalonym x , gdy $N \rightarrow \infty$.

³ I koniecznie zapamiętać !!!

Płynie stąd w szczególności wniosek⁴, że

$$e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \frac{1}{120} + \frac{1}{720} + \frac{1}{7!} + \frac{1}{8!} + \frac{1}{9!} + \frac{1}{10!} + \dots$$

Nie sposób oprzeć się następującej uwadze: Funkcja wykładnicza określona wzorem e^x ma tę własność, że jest sama swoją pochodną. Także otrzymany przez nas szereg ma tę własność, że różniczkując go formalnie wyraz za wyrazem otrzymujemy ten sam szereg. Nic dziwnego, jeśli zważymy, że funkcja przedstawia się jako suma tego szeregu. Uwaga ta może być jednak poczyniona bez żadnych oszacowań korzystających ze wzoru Taylora. Oczywiście bez oszacowań pozwala ona tylko wysnuć hipotezę, że między funkcją wykładniczą $f(x) = e^x$ i szeregiem ze wzoru (♣) jest jakiś związek.

Przykład 2: $f(x) = \sin x$

Ponieważ

$$f^{(n)}(x) = \begin{cases} (-1)^{n/2} \cdot \sin x & \text{dla } n \text{ parzystych} \\ (-1)^{(n-1)/2} \cdot \cos x & \text{dla } n \text{ nieparzystych} \end{cases}$$

oraz

$$f^{(n)}(0) = \begin{cases} 0 & \text{dla } n \text{ parzystych} \\ (-1)^{(n-1)/2} & \text{dla } n \text{ nieparzystych} \end{cases}$$

szeregiem Taylora funkcji f w zerze jest szereg⁵

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

Udowodnienie, że szereg ten jest zbieżny do funkcji f sprowadza się, podobnie jak w poprzednim przykładzie, do wykazania, że przy ustalonym x reszty wzoru Taylora dążą do zera⁶:

$$|R_{N+1}(x)| = \left| \frac{f^{(N+1)}(t_x \cdot x)}{(N+1)!} \cdot x^{N+1} \right| = \left| \frac{j \sin(t_x \cdot x)}{(N+1)!} \cdot x^{N+1} \right| = \frac{|j \sin(t_x \cdot x)|}{(N+1)!} \cdot |x|^{N+1} \leq \frac{|x|^{N+1}}{(N+1)!}.$$

Przy ustalonym $x \neq 0$ zbieżność ciągu $\left(\frac{|x|^{N+1}}{(N+1)!} \right)_{N \in \mathbb{N}}$ do zera dowodzimy korzystając z wersji kryterium d'Alemberta dla ciągów:

$$\frac{|x|^{N+2}/(N+2)!}{|x|^{N+1}/(N+1)!} = \frac{|x|}{N+2} \rightarrow 0 < 1.$$

Udowodniliśmy więc, że dla każdej liczby rzeczywistej x zachodzi równość

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \frac{x^{11}}{11!} + \dots$$

⁴Jeśli we wzorze (♣) przyjmiemy $x = 1$.

⁵Po odpowiednim przenumrowaniu wyrazów.

⁶W międzyczasie posługujemy się oznaczeniem $j \sin$ dla funkcji "jakiś sinus", którą może być $\pm \sin$ lub $\pm \cos$.

Analogicznie można wykazać, że dla każdego x prawdziwy jest wzór

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720} + \frac{x^8}{8!} - \frac{x^{10}}{10!} + \dots$$

Do kompletu przypomnijmy też dwa rozwinięcia z wczorajszego wykładu:

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \cdot x^n}{n} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^6}{6} + \dots \quad \text{dla } x \in (-1, 1]$$

$$\operatorname{arctg} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot x^{2n+1}}{2n+1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9} - \frac{x^{11}}{11} + \dots \quad \text{dla } x \in [-1, 1]$$

Przykład 3: $f(x) = e^{x^2}$

Wypisanie szeregu Taylora tej funkcji przez obliczenie jej pochodnych w zerze byłoby trochę skomplikowane, bo trudno od ręki podać wzór na pochodną funkcji f dalekiego rzędu.

Jednak z równości

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

wynika⁷, że dla każdej liczby rzeczywistej x zachodzi równość

$$f(x) = e^{x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n!}.$$

Skoro f jest przedstawiona w postaci sumy szeregu potęgowego, to jest to jej szereg Taylora. W szczególności możemy z tego szeregu odczytać pochodne funkcji f w zerze:

$$f^{(n)}(0) = \begin{cases} \frac{n!}{(n/2)!} & \text{dla } n \text{ parzystych} \\ 0 & \text{dla } n \text{ nieparzystych} \end{cases}$$

A teraz kilka zdań komentarza dotyczącego materii wykraczającej poza ramy tego wykładu.

Z jednej strony widzieliśmy, że szereg Taylora funkcji nieskończenie⁸ różniczkowalnej nie musi być zbieżny do samej funkcji. Z drugiej zaś zobaczyliśmy przykłady, w których tak jest: funkcja wyraża się przy pomocy szeregu potęgowego, czyli swojego szeregu Taylora. Procedura dowodzenia takiej zbieżności⁹ jest dość żmudna. Okazuje się jednak, że wśród funkcji można wyróżnić tak zwane funkcje analityczne. Z definicji są to funkcje o dziedzinie będącej przedziałem otwartym¹⁰, które wokół każdego punktu swojej dziedziny wyrażają się przy pomocy sumy szeregu potęgowego. Funkcja analityczna jest

⁷Po podstawieniu x^2 w miejsce x .

⁸"Funkcja nieskończenie różniczkowalna" to skrócona forma od "funkcja nieskończenie wiele razy różniczkowalna", czyli mająca pochodne wszystkich rzędów. Czasami używa się też krótszego sformułowania "funkcja gładka", ale nie jest to sformułowanie uniwersalne, bo czasami mówi się o funkcji, że jest gładka, gdy ma tyle pochodnych, ile wynika z kontekstu — na przykład dwie, pięć lub siedemnaście.

⁹Na przykład z wykorzystaniem wzoru Taylora.

¹⁰Może mieć końce w $\pm\infty$.

więc lokalnie sumą swojego szeregu Taylora. Póki co wygląda to trochę na masło maślane, bo skoro definiujemy funkcje analityczne jako będące sumami szeregów potęgowych, to cóż to za rewelacja, że okazują się one być sumami szeregów potęgowych. Przecież to właśnie założyliśmy w definicji.

Okazuje się, że analityczne są podstawowe funkcje, które znamy: wielomiany, funkcje wykładnicze, logarytmiczne, potęgowe w $(0, \infty)$, trygonometryczne, odwrotne do trygonometrycznych. Ponadto wykonywanie czterech działań na funkcjach analitycznych oraz składanie funkcji analitycznych prowadzi do funkcji analitycznych. Także funkcja odwrotna do funkcji analitycznej o pochodnej różnej od zera¹¹ jest analityczna.

Morał¹² z tej opowieści płynie następujący: każda funkcja zdefiniowana "ładnym wzorkiem" jest analityczna, czyli lokalnie jest sumą swojego szeregu Taylora. Trzeba tu jednak uważać na konstrukcje typu $|x| = \sqrt{x^2}$, co jest w pewnym sensie "ładnym wzorkiem", ale definiuje funkcję nieróżniczkowalną, a więc nieanalityczną. Aby uniknąć tego typu niespodzianek, trzeba używać funkcji określonych na przedziałach otwartych. Tu problem wziął się z zera pod pierwiastkiem — pierwiastek nie jest określony na zbiorze otwartym zawierającym zero w swoim wnętrzu.

Funkcja

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & \text{dla } x \neq 0 \\ 0 & \text{dla } x = 0 \end{cases}$$

omawiana na wczorajszym wykładzie nie jest analityczna, bo wokół zera nie jest sumą swojego szeregu Taylora¹³. Żeby skonstruować taką funkcję, musiałem użyć klamerek, gdyż nie da się takiej funkcji zapisać "ładnym wzorkiem". Jednak funkcja ta jest analityczna w przedziale $(-\infty, 0)$ i jest też analityczna w przedziale $(0, \infty)$.

Na koniec jeszcze jedna własność funkcji analitycznych. Otóż funkcje nieskończenie różniczkowalne są giętkie¹⁴ w tym sensie, że jeśli znam funkcję $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ na przedziale¹⁵ $(0, 1)$, to nie mam bladego pojęcia¹⁶, jak wygląda ona na przedziale $(2, 3)$.

Funkcje analityczne natomiast są sztywne, to znaczy, że funkcja analityczna na $\mathbb{R}$ jest jednoznacznie wyznaczona¹⁷ przez swoje wartości na przedziale $(0, 1)$.

¹¹To znaczy: o pochodnej, która nigdzie się nie zeruje.

¹²Morał ten ma jedynie charakter informacyjny, ponieważ teoria funkcji analitycznych wykracza poza program wykładu.

¹³Przypominam, że szereg Taylora tej funkcji w zerze to szereg zerowy.

¹⁴Widzieliśmy to na przykładach w pierwszym semestrze.

¹⁵Tu i dalej podane przedziały są przykładowe.

¹⁶Jeśli np. wiem, że $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ oraz $f(x) = \sin x$ dla $x \in (0, 1)$, to mogę mieć

$$f(x) = e^x \quad \text{dla } x \in (2, 3)$$

albo mogę mieć

$$f(x) = \sqrt{x} \quad \text{dla } x \in (2, 3)$$

albo jak mnie poniesie fantazja, równie dobrze mogę mieć

$$f(x) = \cos(e^{x^\pi} + \sqrt{17}) \quad \text{dla } x \in (2, 3).$$

¹⁷Innymi słowy: Jeśli funkcje f i g są analityczne na $\mathbb{R}$ oraz $f(x) = g(x)$ dla $x \in (0, 1)$, to wówczas $f(x) = g(x)$ dla każdego $x \in \mathbb{R}$.