Dzień 34 (środa 6 maja 2020)

Szeregi potęgowe (c.d.)

Dziś kilka zadań ilustrujących zastosowanie szeregów potęgowych.

407. Niech $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ będzie funkcją zdefiniowaną wzorem

$$f(x)=x^{22}\cdot e^{x^7}.$$

Obliczyć $f^{(k)}(0)$ dla $k=50, 51, 52, \ldots, 60$.

Zanim zajrzysz na kolejną stronę, rozwiąż powyższe zadanie, a przynajmniej podejmij próbę rozwiązania, aby wiedzieć, gdzie napotykasz trudności.

Rozwiązanie:

Ze wzoru[1]

$$e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$$

wynika

$$e^{x^7}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{7n}}{n!}$$

i w konsekwencji

$$f(x)=x^{22}\cdot e^{x^7}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{7n+22}}{n!}\,.$$

Zapisaliśmy więc funkcję f w postaci sumy szeregu potęgowego zbieżnego na całej prostej. Ze współczynników tego szeregu można odczytać pochodne funkcji f w zerze, a dokładniej: jeśli w szeregu występuje wyraz $a_k x^k$, to

$$f^{(k)}(0)=k!\cdot a_k\,.$$

Interesujące nas niezerowe wyrazy szeregu potęgowego odpowiadają $n=4$, $k=50$ oraz $n=5$, $k=57$.

Wobec tego

$$f^{(50)}(0)=\frac{50!}{4!}\,,$$

$$f^{(57)}(0)=\frac{57!}{5!}$$

oraz

$$f^{(k)}(0)=0$$

dla pozostałych k wymienionych w treści zadania.

408. Niech $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ będzie funkcją ciągłą zdefiniowaną dla $x\neq 0$ wzorem

$$f(x)=\frac{e^x-\sum\limits_{n=0}^{2020}\frac{x^n}{n!}}{x^{2021}}\,.$$

Obliczyć $f(0)$ oraz $f'(0)$.

Zanim zajrzysz na kolejną stronę, rozwiąż powyższe zadanie, a przynajmniej podejmij próbę rozwiązania, aby wiedzieć, gdzie napotykasz trudności.

[1]Jeśli czujesz się niepewnie patrząc na wzory ze znakiem $\sum$, rozpisz sobie każdą z sum "z kropeczkami", aby wyraźnie widzieć, jakie składniki zawiera.

Rozwiązanie:

Ze wzoru

$$e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$$

wynika

$$e^x-\sum_{n=0}^{2020}\frac{x^n}{n!}=\sum_{n=2021}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$$

i w konsekwencji

$$f(x)=\frac{e^x-\sum\limits_{n=0}^{2020}\frac{x^n}{n!}}{x^{2021}}=\sum_{n=2021}^{\infty}\frac{x^{n-2021}}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{(n+2021)!}\,.$$

Dla $x\neq 0$ zapisaliśmy więc funkcję f w postaci sumy szeregu potęgowego zbieżnego na całej prostej, a ponieważ zarówno funkcja f jak i suma powyższego szeregu potęgowego są funkcjami ciągłymi, równość zachodzi także dla $x=0$.

Wobec tego[2]

$$f(0)=\frac{1}{2021!}$$

oraz[3]

$$f'(0)=\frac{1}{2022!}\,.$$

409. Obliczyć sumę

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}\,.$$

Wskazówka: Obliczyć sumę szeregu potęgowego

$$\sum_{n=1}^{\infty}nx^n\,.$$

W tym celu zastanowić się, jakiego prostego szeregu pochodną jest ten szereg lub szereg bardzo do niego zbliżony.

Zanim zajrzysz na kolejną stronę, rozwiąż powyższe zadanie, a przynajmniej podejmij próbę rozwiązania, aby wiedzieć, gdzie napotykasz trudności.

[2]Uwzględniając wyraz ostatniego szeregu odpowiadający $n=0$.

[3]Uwzględniając pochodną wyrazu odpowiadającego $n=1$.

Rozwiązanie:

Po obustronnym zrózniczkowaniu wzoru[4]

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$$

otrzymujemy[5]

$$\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2},$$

skąd po obustronnym wymnożeniu przez x dostajemy

$$\sum_{n=1}^{\infty} nx^n = \frac{x}{(1-x)^2}.$$

Podstawienie $x=1/2$ daje po lewej stronie szereg liczbowy z treści zadania, a prawa strona jest równa **2.**

Odpowiedź: Szereg liczbowy podany w treści zadania ma sumę **2.**

W poniższym zadaniu masz podany szkielet rozwiązania. Twoje zadanie to uzupełnić brakujące fragmenty w miejscu kropek.

410. Obliczyć sumę szeregu

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3n+1}.$$

Rozwiązanie:

Rozważmy funkcję f daną wzorem

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{3n+1}}{3n+1}. \tag{1}$$

Przedziałem zbieżności szeregu potęgowego definiującego funkcję f jest przedział .... Na tym przedziale funkcja f jest ciągła, a we wnętrzu tego przedziału możemy różniczkować szereg potęgowy wyraz za wyrazem. Tak więc we wnętrzu przedziału zbieżności funkcji f mamy

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \text{...........................} = \text{............................}.$$

Zatem funkcja f jest funkcją pierwotną powyższej funkcji i do znalezienia wzoru definiującego funkcję f bez szeregu potęgowego wystarczy obliczyć całkę $\int f'(x)dx$.

Korzystając ze wzoru

$$\int \frac{ax^2+bx+c}{1-x^3}dx =$$

$$= (c-b)\frac{\sqrt{3}}{3}\cdot \text{arctg}\left(\frac{1+2x}{\sqrt{3}}\right) - \frac{(b+c)\ln|1-x|}{3} + \frac{(b+c)\ln(x^2+x+1)}{6} - \frac{a\ln|1-x^3|}{3} + C$$

dla $a=$.........., $b=$.........., $c=$.......... otrzymujemy

[4]Wzór ten jest prawdziwy dla $x\in(-1,1)$.

[5]Składnik odpowiadający $n=0$ jest zerowy, więc go pomijamy.

$$f(x)=\int f'(x)dx= \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots . \qquad (2)$$

W celu dobrania odpowiedniej stałej całkowania C porównujemy wzory (1) i (2) dla $x=.......$ Zgodnie ze wzorem (1)

$$f(......)=...... ,$$

natomiast wzór (2) daje

$$f(......)= \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots +C=$$

$$= \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots +C .$$

Stąd

$$C= \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

i ostatecznie

$$f(x)= \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots . \qquad (3)$$

Przyjmując $x=......$ we wzorze (1) otrzymujemy dany w zadaniu szereg liczbowy jako równy .... Z drugiej strony wzór (3) daje

$$f(......)= \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots =$$

$$= \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots =$$

$$= \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots .$$

Odpowiedź: Suma danego w zadaniu szeregu liczbowego jest równa

....

Zanim zajrzysz na kolejną stronę, rozwiąż powyższe zadanie, a przynajmniej podejmij próbę rozwiązania, aby wiedzieć, gdzie napotykasz trudności.

410. Obliczyć sumę szeregu

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3n+1}\,.$$

Rozwiązanie:

Rozważmy funkcję f daną wzorem

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{3n+1}}{3n+1}\,. \tag{1}$$

Przedziałem zbieżności szeregu potęgowego definiującego funkcję f jest przedział $[-1,1)$. Na tym przedziale funkcja f jest ciągła, a we wnętrzu tego przedziału możemy różniczkować szereg potęgowy wyraz za wyrazem. Tak więc we wnętrzu przedziału zbieżności funkcji f mamy

$$f'(x)=\sum_{n=0}^{\infty} x^{3n}=\frac{1}{1-x^3}\,.$$

Zatem funkcja f jest funkcją pierwotną powyższej funkcji i do znalezienia wzoru definiującego funkcję f bez szeregu potęgowego wystarczy obliczyć całkę $\int f'(x)dx$.

Korzystając ze wzoru

$$\int \frac{ax^2+bx+c}{1-x^3}dx=$$

$$=(c-b)\frac{\sqrt{3}}{3}\cdot\mathrm{arctg}\left(\frac{1+2x}{\sqrt{3}}\right)-\frac{(b+c)\ln|1-x|}{3}+\frac{(b+c)\ln\left(x^2+x+1\right)}{6}-\frac{a\ln\left|1-x^3\right|}{3}+C$$

dla $a=0$, $b=0$, $c=1$ otrzymujemy

$$f(x)=\int f'(x)dx=\frac{\sqrt{3}}{3}\cdot\mathrm{arctg}\left(\frac{1+2x}{\sqrt{3}}\right)-\frac{\ln|1-x|}{3}+\frac{\ln\left(x^2+x+1\right)}{6}+C\,. \tag{2}$$

W celu dobrania odpowiedniej stałej całkowania C porównujemy wzory (1) i (2) dla $x=0$. Zgodnie ze wzorem (1)

$$f(0)=0\,,$$

natomiast wzór (2) daje

$$f(0)=\frac{\sqrt{3}}{3}\mathrm{arctg}(1/\sqrt{3})-\frac{\ln 1}{3}+\frac{\ln 1}{6}+C=\frac{\sqrt{3}\pi}{18}+C\,.$$

Stąd

$$C=-\frac{\sqrt{3}\pi}{18}$$

i ostatecznie

$$f(x)=\frac{\sqrt{3}}{3}\cdot\mathrm{arctg}\left(\frac{1+2x}{\sqrt{3}}\right)-\frac{\ln|1-x|}{3}+\frac{\ln\left(x^2+x+1\right)}{6}-\frac{\sqrt{3}\pi}{18}\,. \tag{3}$$

Przyjmując $x=-1$ we wzorze (1) otrzymujemy dany w zadaniu szereg liczbowy jako równy $-f(-1)$. Z drugiej strony wzór (3) daje

$$f(-1)=\frac{\sqrt{3}}{3}\cdot\mathrm{arctg}\left(-1/\sqrt{3}\right)-\frac{\ln 2}{3}+\frac{\ln 1}{6}-\frac{\sqrt{3}\pi}{18}=-\frac{\sqrt{3}\pi}{18}-\frac{\ln 2}{3}-\frac{\sqrt{3}\pi}{18}=-\frac{\sqrt{3}\pi}{9}-\frac{\ln 2}{3}\,.$$

Odpowiedź: Suma danego w zadaniu szeregu liczbowego jest równa $\frac{\sqrt{3}\pi}{9}+\frac{\ln 2}{3}$.