Dzień 35 (czwartek 7 maja 2020)

Ciągi i szeregi funkcyjne.

Dziś zajmiemy się bardziej ogólnymi[1] ciągami i szeregami funkcyjnymi, to znaczy takimi ciągami i szeregami, których wyrazy są funkcjami. Przypominam, że ciąg i szereg to naprawdę taki sam obiekt, tylko nieco inaczej podany. W ciągu podajemy[2] wyrazy, a w szeregu chodzi nam o ciąg coraz dłuższych sum częściowych — wówczas wyrazami nazywamy składniki występujące w tych sumach.

Przykład szeregów potęgowych trochę nas rozpieścił: Po pierwsze obszar zbieżności szeregu potęgowego jest bardzo porządnym zbiorem[3], a po drugie suma szeregu potęgowego jest bardzo porządną[4] funkcją i w dodatku szereg taki można dowolnie wiele razy różniczkować wyraz za wyrazem. Okazuje się jednak, że przy zupełnie dowolnych ciągach i szeregach funkcyjnych tak dobrze już nie jest.

Dla ustalenia uwagi zajmijmy się ciągami funkcyjnymi. To obejmie też szeregi funkcyjne, tyle tylko, że należy rozumieć szereg jako ciąg sum częściowych.

Ciągiem funkcyjnym nazwiemy ciąg $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, gdzie funkcje f_n są określone[5] na wspólnej dziedzinie. Powiemy, że ciąg (f_n) jest zbieżny punktowo[6] do funkcji[7] f (określonej na tej samej dziedzinie, co funkcje f_n), jeżeli dla każdej liczby x należacej do wspólnej dziedziny rozważanych funkcji zachodzi zbieżność

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)\,.$$

Zapiszemy to symbolicznie[8]:

$$f_n \to f\,.$$

Do tego dopowiemy wyraźnie ”przy $n\to\infty$” lub zostawimy to w domyśle, jeśli uznamy, że jest to jasne z kontekstu.

Zbieżność punktowa jest więc dokładnie tym, co stosowaliśmy w przypadku szeregów potęgowych. Po prostu dla każdego punktu wspólnej dziedziny z osobna rozważamy zbieżność ciągu liczbowego[9] o wyrazach będących wartościami poszczególnych funkcji f_n w tym właśnie punkcie.

[1]Dotąd poznaliśmy jedynie szeregi potęgowe — jest to bardzo szczególny rodzaj szeregów funkcyjnych.

[2]Najczęściej gotowym w miarę prostym wzorem.

[3]Przedziałem.

[4]Nieskończenie wiele razy różniczkowalną.

[5]Lub rozważane na wspólnej dziedzinie. Nawet jeśli wzory, którymi określone są funkcje, mają sens na większym zbiorze, to z kontekstu powinno być jasne, do jakiego zbioru je ograniczamy.

[6]Póki co możemy przysłówek ”punktowo” lub przymiotnik ”punktowa” w sformułowaniu ”zbieżność punktowa” taktować jak niewiele znaczący ozdobnik, ale niedługo te słówka staną się bardzo istotne.

[7]Oznaczenia tu przyjęte podyktowane są względami dydaktycznymi — oznaczenie granicy punktowej ciągu (f_n) przez f, gdzie to wszystko są **f**unkcje, pozwala się łatwo rozeznać, co jest czym i do czego pasuje. Należy sobie jednak zdawać sprawę, że gdyby ktoś wziął sobie za bardzo do serca obowiązujące konwencje, to powinien uznać, że literka f oznacza ciąg (f_n), jako że f_n oznacza n-ty wyraz ciągu f.

[8]Zauważ, że w tym zapisie używamy nazw funkcji, a nie ich wartości w punkcie x.

[9]Lub szeregu liczbowego.

Popatrzmy teraz na dwa przykłady, które pokażą, że z ogólnymi ciągami i szeregami funkcyjnymi może nie być tak fajnie jak z szeregami potęgowymi.

Przykład 1: Rozważmy ciąg funkcyjny (f_n), w którym funkcje $f_n:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ są określone wzorem:

$$f_n(x)=\frac{1}{1+n^2x^2}\,.$$

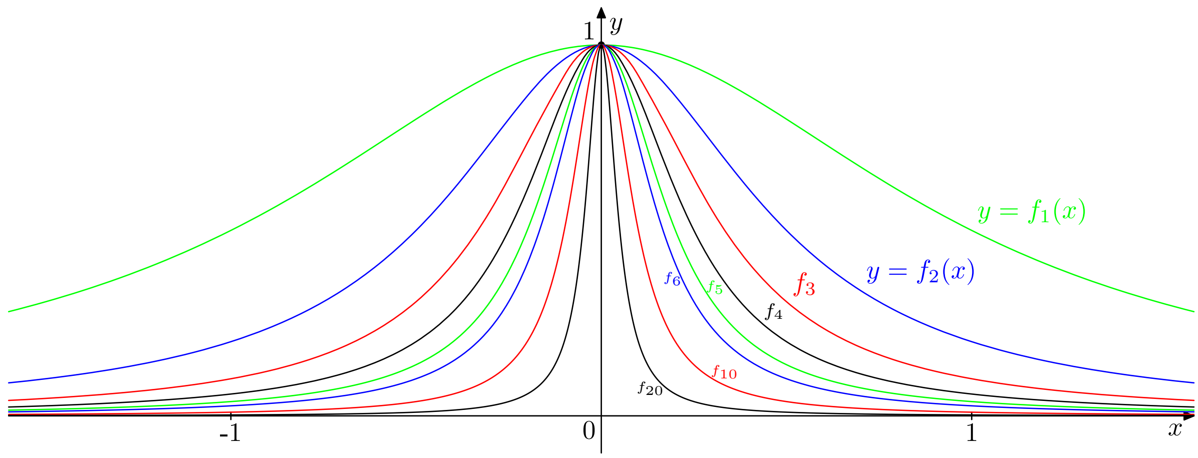
Jeśli komuś to pomoże, to można też przyjąć, że

$$f_1(x)=\frac{1}{1+x^2}$$

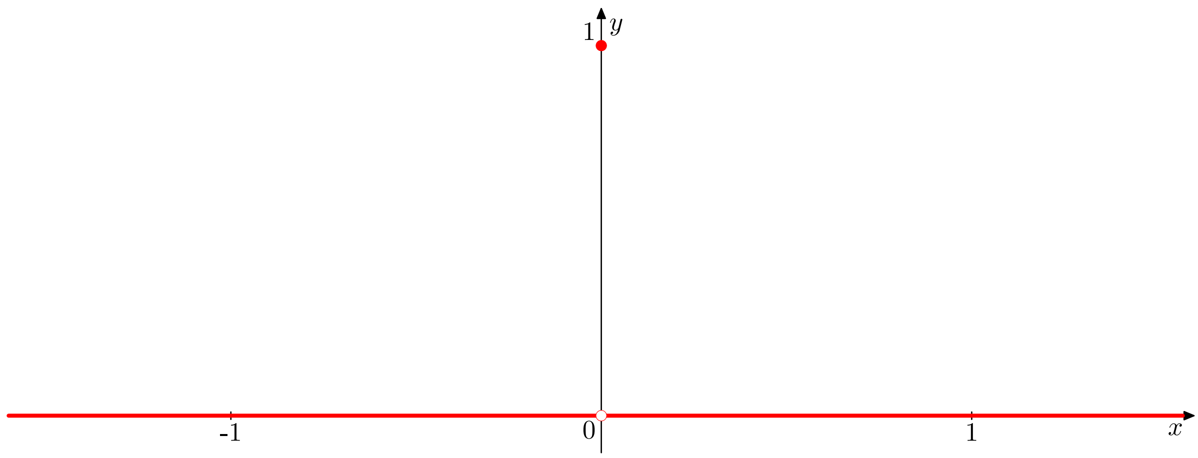
oraz

$$f_n(x)=f_1(nx)\,.$$

Wtedy będzie widać, że wystarczy wyobrazić sobie wykres funkcji f_1, a wówczas wykres funkcji f_n jest wykresem funkcji f_1 zwężonym n-krotnie w poziomie (rys. 1).



rys. 1



rys. 2

Granicę punktową ciągu (f_n) można odczytać z rysunku 1 i zobaczyć, że jej wykres jest przedstawiony na rysunku 2.

Można ją też wyliczyć "na ślepo" bez wyobrażania sobie wykresów poszczególnych funkcji:

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+n^2x^2} = \begin{cases} 0 & \text{dla } x\neq 0 \\ 1 & \text{dla } x=0 \end{cases}$$

Zatem funkcja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ będąca granicą punktową ciągu (f_n) określona jest wzorem

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x\neq 0 \\ 1 & \text{dla } x=0 \end{cases}$$

Przy tych oznaczeniach możemy zapisać $f_n \to f$.

Co wynika z powyższego przykładu? Mamy oto zbieżny[10] ciąg funkcyjny. Wyrazy tego ciągu są bardzo porządnymi funkcjami: nieskończenie wiele razy różniczkowalnymi na całej prostej[11]. A graniczna funkcja nie jest nawet ciągła. Co prawda tylko w jednym punkcie, ale jest to wynikiem kompromisu między prostotą przykładu, a pokazaniem spektakularnego zjawiska — spokojnie mógłbym uzyskać więcej nieciągłości funkcji granicznej za cenę komplikacji przykładu.

Przykład 2: Rozważmy szereg[12] funkcyjny

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n\cdot 3^n\cdot x)}{n}\,.$$

Wyrazy tego szeregu są również bardzo porządne[13], a ponadto są one funkcjami okresowymi o okresie[14] 2π. Skoro tak, to wystarczy przyjrzeć się zachowaniu tego szeregu na przedziale długości 2π, powiedzmy $[0,\, 2\pi]$. Interesować nas będzie obszar zbieżności tego szeregu, czyli rozstrzygnięcie[15], w których punktach szereg jest zbieżny, a w których rozbieżny.

Przyjrzyjmy się danemu szeregowi w pewnych szczególnych punktach, dobranych tak, aby łatwo było rozstrzygnąć jego zbieżność.

Dla $x=0$ otrzymujemy szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\,,$$

czyli szereg harmoniczny, a więc rozbieżny. Podobnie jest dla[16] $x=2\pi$.

[10]Zbieżny punktowo, ale na razie nie wiemy, aby mógł być zbieżny inaczej.

[11]A nawet analitycznymi na całej prostej, jeśli ktoś pamięta, co to funkcje analityczne.

[12]Akurat tym razem wygodniej jest mi rozważać szereg, a nie ciąg.

[13]Nieskończenie wiele razy różniczkowalne na całej prostej, a nawet analityczne.

[14]Tak naprawdę to wszystkie wyrazy tego szeregu mają też okres $2\pi/3$, ale nie będę robił z tego użytku.

[15]Tak po prawdzie to tego do końca nie rozstrzygniemy, ale zdobędziemy wystarczającą motywację, aby tak postawiony ambitny cel porzucić.

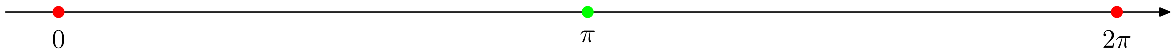
[16]Oraz dla $x=2k\pi$, ale ze względu na okresowość wyrazów szeregu interesują nas tylko punkty z przedziału $[0,\, 2\pi]$.

Dla $x=\pi$ otrzymujemy[17] szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n\cdot 3^n}}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}\,,$$

czyli szereg anharmoniczny, a więc zbieżny.

Nanieśmy te informacje na oś liczbową zaznaczając na czerwono punkty, w których szereg jest rozbieżny, a na zielono punkty, w których jest zbieżny (rys. 3).



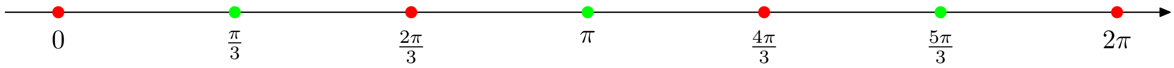
rys. 3

Dla $x=\dfrac{k\pi}{3}$, gdzie $k=1,2,4,5$, otrzymujemy szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos\left(\frac{kn\cdot 3^n\cdot\pi}{3}\right)}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos\left(kn\cdot 3^{n-1}\cdot\pi\right)}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{kn\cdot 3^{n-1}}}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{kn}}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left((-1)^k\right)^n}{n}\,,$$

czyli zbieżny szereg anharmoniczny dla k nieparzystych oraz rozbieżny szereg harmoniczny dla k parzystych.

Nanosimy te informacje na oś liczbową (rys. 4).



rys. 4

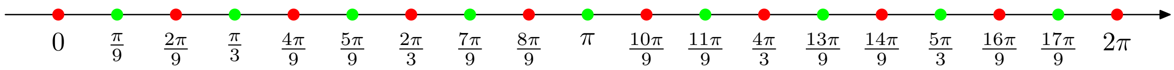
Teraz rozważamy $x=\dfrac{k\pi}{9}$, gdzie k jest liczbą całkowitą dodatnią mniejszą od 18, niepodzielną przez 3. Otrzymujemy szereg[18]

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos\left(\frac{kn\cdot 3^n\cdot\pi}{9}\right)}{n}=\cos\left(\frac{k\cdot\pi}{3}\right)+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\cos\left(kn\cdot 3^{n-2}\cdot\pi\right)}{n}=\cos\left(\frac{k\cdot\pi}{3}\right)+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{kn\cdot 3^{n-2}}}{n}=$$

$$=\cos\left(\frac{k\cdot\pi}{3}\right)+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{kn}}{n}=\cos\left(\frac{k\cdot\pi}{3}\right)+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\left((-1)^k\right)^n}{n}\,,$$

czyli zbieżny szereg anharmoniczny[19] dla k nieparzystych oraz rozbieżny szereg harmoniczny dla k parzystych.

Nanosimy te informacje na oś liczbową (rys. 5).



rys. 5

[17] Pamiętając, że $\cos k\pi=(-1)^k$, a wartość $(-1)^k$ zależy tylko od parzystości liczby k. W szczególności

$$(-1)^{n\cdot 3^n}=(-1)^n\,,$$

bo liczby $n\cdot 3^n$ oraz n są tej samej parzystości.

[18] W trakcie rachunków wyłączamy przed szereg pierwszy składnik (odpowiadający $n=1$) — nie wpływa on na zbieżność szeregu.

[19] Naprawdę jest to szereg anharmoniczny bez pierwszego wyrazu. Podobnie szereg harmoniczny chwilę dalej zaczyna się od drugiego wyrazu.

Teraz rozważamy $x=\frac{k\pi}{27}$, gdzie k jest liczbą całkowitą dodatnią mniejszą od 54, niepodzielną przez 3. Otrzymujemy szereg[20]

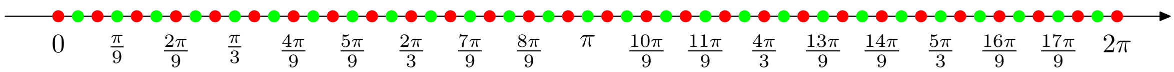
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos\left(\frac{kn\cdot 3^n\cdot\pi}{27}\right)}{n}=\cos\left(\frac{k\cdot\pi}{9}\right)+\frac{\cos\left(\frac{2k\cdot\pi}{3}\right)}{2}+\sum_{n=3}^{\infty}\frac{\cos\left(kn\cdot 3^{n-3}\cdot\pi\right)}{n}=$$

$$=\cos\left(\frac{k\cdot\pi}{9}\right)+\frac{\cos\left(\frac{2k\cdot\pi}{3}\right)}{2}+\sum_{n=3}^{\infty}\frac{(-1)^{kn\cdot 3^{n-3}}}{n}=\cos\left(\frac{k\cdot\pi}{9}\right)+\frac{\cos\left(\frac{2k\cdot\pi}{3}\right)}{2}+\sum_{n=3}^{\infty}\frac{(-1)^{kn}}{n}=$$

$$=\cos\left(\frac{k\cdot\pi}{9}\right)+\frac{\cos\left(\frac{2k\cdot\pi}{3}\right)}{2}+\sum_{n=3}^{\infty}\frac{\left((-1)^k\right)^n}{n},$$

czyli zbieżny szereg anharmoniczny[21] dla k nieparzystych oraz rozbieżny szereg harmoniczny[22] dla k parzystych.

Informacje te znajdziemy na rysunku 6.



rys. 6

W analogiczny sposób[23] można udowodnić, że dla $x=\frac{k\pi}{3^m}$ dany szereg jest zbieżny w przypadku k nieparzystego i rozbieżny w przypadku k parzystego.

Widzimy więc, że **szereg jest zbieżny w punktach, które leżą gęsto na prostej, a rozbieżny w innych punktach, które też leżą gęsto na prostej.**

Obszar[24] zbieżności rozważanego szeregu funkcyjnego jest więc jakąś totalną sieczką. Nie będziemy nawet zastanawiać się nad jego zbieżnością w innych punktach niż wymienione powyżej.

Podsumujmy:

W przypadku ciągu funkcyjnego przejście graniczne nie zachowuje ciągłości. Granica[25] ciągu funkcji ciągłych[26] nie musi być ciągła. A obszar zbieżności ciągu lub szeregu funkcyjnego może być bardzo kapryśnym zbiorem.

[20] Tym razem wyłączamy przed szereg dwa składniki (odpowiadające $n=1$ oraz $n=2$).

[21] Bez dwóch początkowych wyrazów.

[22] Też bez dwóch wyrazów.

[23] To jest tylko i wyłącznie kwestia odpowiedniego zredagowania dowodu. W podanych punktach otrzymujemy prawie szereg anharmniczny lub harmoniczny. "Prawie", bo nie zgadza się skończenie wiele początkowych wyrazów, co jednak nie wpływa na zbieżność.

[24] W zasadzie jest tu pewne nadużycie, gdyż słowo "obszar" kojarzy się zwykle z w miarę porządnymi zbiorami.

[25] Punktowa.

[26] A nawet różniczkowalnych.