

Dzień 36 (piątek 8 maja 2020)**Ciągi i szeregi funkcyjne (c.d.).****Podsumowanie wniosków z wczorajszych przykładów:**

W przypadku ciągu funkcyjnego przejście graniczne nie zachowuje ciągłości. Granica¹ ciągu funkcji ciągłych² nie musi być ciągła. A obszar zbieżności ciągu lub szeregu funkcyjnego może być bardzo kapryśnym zbiorem.

Dziś postaram się, na ile to możliwe, wyjaśnić skąd biorą się powyższe problemy i jaka jest recepta na ich rozwiązanie.

Otóż mając ciąg funkcyjny, czyli taki, którego wyrazy są funkcjami, zdefiniowaliśmy przejście graniczne³ bez uwzględniania w procesie tego przejścia granicznego, że obiekty, którymi operujemy, są funkcjami. Przechodziliśmy do granicy osobno dla każdego punktu wspólnej dziedziny rozważanych funkcji, a następnie z tak uzyskanych granic ciągów liczbowych skomponowaliśmy funkcję graniczną. Odpowiednie przejście graniczne powinno jednak uwzględniać naturę wyrazów ciągu⁴, bo tylko wtedy mamy szansę na zachowanie podstawowych własności⁵ tych obiektów.

Wróćmy więc do definicji granicy ciągu liczbowego, która to definicja sprawdza się znakomicie. Ciąg liczbowy (a_n) jest zbieżny do granicy g , jeżeli

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \forall n \geq N |a_n - g| < \varepsilon.$$

Intuicyjna opowieść jest taka, że dalekie wyraz ciągu mają być bliskie granicy. Za cały mechanizm uzależnienia dalekiego posunięcia się w ciągu stosownie do małości epsilon odpowiada układ kwantyfikatorów, który jest tu dość uniwersalny⁶. Całości dopełnia możliwość określania bliskości dwóch liczb rzeczywistych⁷ dzięki pomiarowi zwykłej geometrycznej odległości między liczbami na osi liczbowej. Odległością liczb x i y jest po prostu moduł ich różnicy: $|x - y|$. Skoro mamy miarę tego, jak bardzo dwie liczby się różnią, to możemy tę miarę wkomponować w definicję granicy ciągu liczbowego.

Przez analogię moglibyśmy przyjąć, że ciąg funkcyjny (f_n) jest zbieżny⁸ do funkcji granicznej f wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \forall n \geq N (\text{miara tego, jak bardzo } f_n \text{ różni się od } f) < \varepsilon.$$

Trzeba więc umówić się jakoś sensownie co do sposobu mierzenia⁹ jak bardzo dwie funkcje się różnią.

¹Punktowa, bo innej na razie nie znamy.

²A nawet różniczkowalnych.

³Czyli zbieżność punktową.

⁴Czyli w tym wypadku funkcji.

⁵W tym momencie interesuje nas ciągłość.

⁶Więc nie będziemy przy nim majstrować.

⁷W tym wypadku a_n oraz g .

⁸Można się spodziewać, że to już będzie inny rodzaj zbieżności niż znana nam zbieżność punktowa.

⁹Mierzenia liczbą rzeczywistą nieujemną.

Do pewnego stopnia jest tu dowolność umowy¹⁰, jeśli jednak mamy osiągnąć odpowiedni cel, to jedna umowa jest lepsza od innych.

Okazuje się¹¹, że w kontekście funkcji ciągłych najodpowiedniejszą miarą tego, jak bardzo różnią się dwie funkcje, jest spojrzenie na największą¹² możliwą ich różnicę w tym samym punkcie.

Przyjmijmy więc, że miarą¹³ tego, jak bardzo różnią się funkcje f i g określone na wspólnej dziedzinie D , jest liczba

$$\sup_{x \in D} |f(x) - g(x)| = \sup \{|f(x) - g(x)| : x \in D\}.$$

Opakujmy to teraz w oznaczenia, jakie są w matematyce powszechnie używane. Normą supremum¹⁴ funkcji f określonej na zbiorze D nazywamy liczbę¹⁵

$$\|f\| = \sup_{x \in D} |f(x)|.$$

Liczba ta mierzy jak duża jest funkcja f , przy czym miarą wielkości funkcji f jest kres górny zbioru modułów jej wartości. Norma supremum dla funkcji jest odpowiednikiem wartości bezwzględnej dla liczby rzeczywistej.

Miarą tego, jak bardzo różnią się dwie funkcje, jest norma¹⁶ ich różnicy¹⁷, w przypadku funkcji f i g będzie to $\|f - g\|$.

Wobec tego definicję zbieżności ciągu funkcyjnego (f_n) do funkcji f , którą to definicję naszkicowaliśmy jako

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \forall n \geq N \text{ (miara tego, jak bardzo } f_n \text{ różni się od } f) < \varepsilon,$$

można teraz doprecyzować następująco

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \forall n \geq N \|f_n - f\| < \varepsilon.$$

Widać tu niezwykle podobieństwo¹⁸ powyższej definicji do definicji zbieżności ciągu. Poza użytymi innymi literkami jedyna różnica jest taka, że zamiast modułu (jedna kreska) mamy normę (dwie kreski).

¹⁰To trochę tak, jakby zapytać, czy w lipcu któregoś tam roku było gorąco. Ktoś powie: Było gorąco, przecież 13-go było ponad 40 stopni. A ktoś inny powie: Ależ skąd, w pozostałe dni było zimno jak diabli, średnia temperatura ledwie przekroczyła 10 stopni. Kto ma rację? Każdy swoją. A to czy przywiążemy większą wagę do maksimum temperatury czy do średniej, zależy od tego, do czego nam to jest potrzebne.

¹¹Tego nie jestem w stanie tu wyjaśnić — trzeba liźnąć trochę analizy funkcjonalnej, aby to do głębi zrozumieć.

¹²Słowo "największą" jest w tym rozbudowanym zdaniu najzgrabniejsze językowo, ale w istocie chodzi mi o kres górny, a nie maksimum.

¹³W teorii przestrzeni metrycznych, która obejmuje tę sytuację, nazywa się to odległością między punktami przestrzeni metrycznej — w tym wypadku punktami odpowiedniej przestrzeni metrycznej są rozważane przez nas funkcje.

¹⁴Są na świecie normy różne. Ale nas interesuje ta jedna. Słowo "supremum" wyjaśnia, o którą normę chodzi.

¹⁵Należy zwrócić uwagę na to oznaczenie. Po pierwsze, pod znakiem normy jest funkcja f , a nie wartość $f(x)$. Po drugie, w domyśle lub w kontekście pozostaje zbiór D , na którym obliczamy normę. Po trzecie, pełny zapis wyglądałby tak: $\|f\|_\infty$ — indeks ∞ mówi, że chodzi o normę supremum.

¹⁶Pozwolę sobie opuszczać słowo "supremum", gdyż innych norm na stole nie mamy.

¹⁷Podobnie: miarą tego, jak bardzo różnią się dwie liczby, jest moduł ich różnicy.

¹⁸Chodzi o graficzne podobieństwo napisu.

Zdefiniowany powyżej rodzaj zbieżności nazywamy zbieżnością jednostajną i zapisujemy jako $f_n \rightrightarrows f$ (w domyśle: przy $n \rightarrow \infty$).

Wyjaśnienia wymaga słówko "jednostajna", które już się pojawiło w pierwszym semestrze przy okazji ciągłości¹⁹ funkcji.

Warunek

$$\forall_{\varepsilon > 0} \exists N \forall n \geq N \|f_n - f\| < \varepsilon$$

jest równoważny warunkowi

$$\forall_{\varepsilon > 0} \exists N \forall n \geq N \|f_n - f\| \leq \varepsilon.$$

Co prawda w każdym z tych warunków dobór N do epsilon jest inny, ale wobec dowolności epsilon, koniec końców nie ma to znaczenia — po prostu przyjęło się pisać nierówność ostrą. Z kolei nierówność

$$\|f_n - f\| \leq \varepsilon,$$

czyli²⁰

$$\sup \{|f_n(x) - f(x)| : x \in D\} \leq \varepsilon,$$

jest równoważna warunkowi

$$\forall_{x \in D} |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon.$$

Zatem jednostajną zbieżność $f_n \rightrightarrows f$ można zdefiniować warunkiem

$$\forall_{\varepsilon > 0} \exists N \forall n \geq N \forall x \in D |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon,$$

co wobec dowolności epsilon jest równoważne warunkowi

$$\forall_{\varepsilon > 0} \exists N \forall n \geq N \forall x \in D |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Ponieważ można zmieniać kolejność kwantyfikatorów tego samego rodzaju stojących obok siebie, ostatni warunek możemy przepisać jako

$$\forall_{\varepsilon > 0} \exists N \forall x \in D \forall n \geq N |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon. \quad (\Rightarrow)$$

Wróćmy teraz do warunku zbieżności punktowej $f_n \rightarrow f$. Możemy go zapisać jako

$$\forall_{x \in D} f_n(x) \rightarrow f(x),$$

co po uwzględnieniu definicji granicy ciągu liczbowego przybiera postać

$$\forall_{x \in D} \forall \varepsilon > 0 \exists N \forall n \geq N |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Po zmianie kolejności pierwszych dwóch kwantyfikatorów otrzymujemy:

$$\forall_{\varepsilon > 0} \forall x \in D \exists N \forall n \geq N |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon. \quad (\rightarrow)$$

Jaka jest różnica między warunkiem zbieżności punktowej $(\rightarrow)$ i warunkiem zbieżności jednostajnej $(\Rightarrow)$? Tylko taka, że w pierwszym warunku mamy układ kwantyfikatorów $\forall_{x \in D} \exists N$, a w drugim zamiast tego jest $\exists N \forall_{x \in D}$. Od tego układu kwantyfikatorów zależy, czy dobór N do ε jest niezależny od x , czy też ma prawo od x zależeć. Słowo "jednostajna" oznacza, że dobór N do ε jest **niezależny** od x .

¹⁹Przypomnę, że ciągłość jednostajna to silniejszy warunek ciągłości, o czym trochę za chwilę.

²⁰Cały czas przyjmujemy, że D jest wspólną dziedziną funkcji f_n oraz f .

Podobnie jest z ciągłością funkcji:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \forall x_0 \in D_f \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in D_f \quad |x - x_0| < \delta \quad |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon,$$

gdzie dobór delty do epsilon ma prawo zależeć od x_0 , ale przy ciągłości jednostajnej²¹ ten dobór jest od x_0 niezależny²²:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x_0 \in D_f \quad \forall x \in D_f \quad |x - x_0| < \delta \quad |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

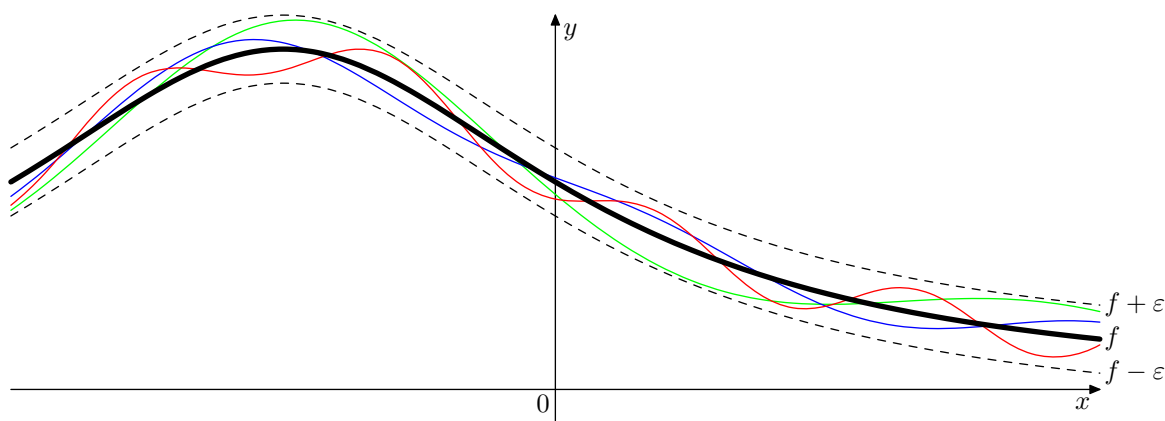
Podobnie jak ciągłość jednostajna funkcji jest warunkiem mocniejszym niż ciągłość, tak zbieżność jednostajna ciągu lub szeregu funkcyjnego jest warunkiem mocniejszym niż zbieżność punktowa.

Ostrzeżenie!!!

Z doświadczenia wiem, że niektórzy studenci mylą jednostajną ciągłość z jednostajną zbieżnością. To są różne pojęcia i dotyczą innych obiektów matematycznych. Jednostajna ciągłość jest własnością pojedynczej funkcji i jest wzmocnieniem warunku ciągłości. Natomiast jednostajna zbieżność jest własnością ciągu (lub szeregu) funkcyjnego i jest wzmocnieniem warunku zbieżności punktowej.

Słowo "jednostajna" oznacza tyle, że dobór δ lub N do epsilon odbywa się jednakoowo²³ na całej dziedzinie²⁴.

Jak sobie wyobrazić, czym jest zbieżność jednostajna ciągu funkcyjnego? Popatrz na rysunek 1.



rys. 1

²¹A więc mocniejszej.

²²Ta niezależność jest zaznaczona odpowiednią kolejnością kwantyfikatorów.

²³Czyli jednostajnie.

²⁴Chodzi o dziedzinę pojedynczej funkcji, gdy mówimy o ciągłości, albo wspólną dziedzinę funkcji będących wyrazami ciągu/szeregu funkcyjnego, gdy mówimy o zbieżności.

Jeśli narysujemy sobie wykres granicznej funkcji f oraz jego przesunięcia w górę i w dół o ε , to prawie wszystkie²⁵ wyrazy ciągu funkcyjnego mają wykresy całkowicie mieszczące się w zakrzywionym pasie ograniczonym przez te przesunięcia. Jest to bowiem geometryczna interpretacja nierówności

$$f(x) - \varepsilon < f_n(x) < f(x) + \varepsilon,$$

które przy odpowiednio dużych²⁶ n muszą²⁷ zachodzić dla każdego $x \in D$.

Przepisując warunek jednostajnej zbieżności $f_n \rightrightarrows f$ z postaci

$$\forall_{\varepsilon > 0} \exists N \forall n \geq N \|f_n - f\| < \varepsilon$$

do dziwacznie wyglądającej postaci

$$\forall_{\varepsilon > 0} \exists N \forall n \geq N \left| \|f_n - f\| - 0 \right| < \varepsilon$$

dostrzegamy w tym ostatnim definicję zbieżności ciągu liczbowego $(\|f_n - f\|)_{n \in \mathbb{N}}$ do zera. Możemy więc powiedzieć, że $f_n \rightrightarrows f$ jest równoważne warunkowi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\| = 0.$$

Taka postać warunku jednostajnej zbieżności może się przydać, bo gdy uda nam się wyliczyć²⁸ $\|f_n - f\|$, mamy szansę na rozstrzygnięcie jednostajnej zbieżności tak skomplikowanego obiektu jak ciąg funkcyjny, badając tak prosty obiekt jak ciąg liczbowy.

Na zakończenie kilka uwag uzupełniających (zakładamy, że wszystkie występujące funkcje są określone na tej samej dziedzinie).

- Norma spełnia nierówność trójkąta, to znaczy $\|f + g\| \leq \|f\| + \|g\|$.
- Jeśli $f_n \rightrightarrows f$ oraz $g_n \rightrightarrows g$, to $(f_n + g_n) \rightrightarrows (f + g)$ i analogicznie $(f_n - g_n) \rightrightarrows (f - g)$.
- Jeśli $f_n \rightrightarrows f$, to dla każdej liczby rzeczywistej c zachodzi $(c \cdot f_n) \rightrightarrows (c \cdot f)$.

A dlaczego w ogóle zajmujemy się zbieżnością jednostajną? To sobie wyjaśnimy w następnym tygodniu. Okaze się bowiem, że granica jednostajnie zbieżnego ciągu²⁹ funkcji ciągłych jest funkcją ciągłą. Zbieżność jednostajna świetnie pasuje do świata funkcji ciągłych, bo ciągłość zachowuje się przy jednostajnych przejściach granicznych. Ale będziemy mieć coś więcej, bo poznamy warunki, które zagwarantują także różniczkowalność granicznej funkcji.

²⁵Czyli wszystkie poza skończoną ilością.

²⁶Odpowiednio dużych to znaczy większych od N dobranego do ε .

²⁷Zgodnie z definicją jednostajnej zbieżności $f_n \rightrightarrows f$.

²⁸Lub choćby oszacować.

²⁹Ewentualnie suma jednostajnie zbieżnego szeregu.