

Dzień 37 (poniedziałek 11 maja 2020)**Zbieżność jednostajna.****Podsumowanie wstępnych informacji o zbieżności jednostajnej z poprzedniego tygodnia.****Norma supremum** funkcji ograniczonej¹ $f : D \rightarrow \mathbb{R}$

$$\|f\| = \sup_{x \in D} |f(x)|.$$

Nierówność trójkąta dla normy supremum: Dla funkcji ograniczonych $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}$ zachodzi

$$\|f + g\| \leq \|f\| + \|g\|.$$

Zbieżność punktowa ciągu funkcyjnego: Ciąg funkcyjny (f_n) jest zbieżny punktowo do funkcji f , co zapisujemy jako $f_n \rightarrow f$, jeżeli dla każdego x należącego do wspólnej dziedziny funkcji f_n oraz f zachodzi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x).$$

Zbieżność jednostajna ciągu funkcyjnego: Ciąg funkcyjny (f_n) jest zbieżny jednostajnie do funkcji f , co zapisujemy jako $f_n \rightrightarrows f$, jeżeli

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\| = 0.$$

Konieczne założenie: Funkcje f_n oraz f są określone na wspólnej dziedzinie.Wskazane założenie: Funkcje f_n oraz f są ograniczone².**A teraz ważne twierdzenie ...****Twierdzenie:** Jeżeli ciąg ograniczonych funkcji ciągłych (f_n) określonych na wspólnej dziedzinie jest zbieżny jednostajnie do funkcji³ f , to funkcja f jest ciągła.*Główny element dowodu:*

Nie jest celem tego wykładu wchodzenie w teorię na tyle głęboko, aby dowodzić wszystkich prezentowanych twierdzeń, ale warto przedstawić pewne charakterystyczne elementy niektórych dowodów.

Tak naprawdę, udowodnimy, że jeżeli $f_n \rightrightarrows f$ oraz wszystkie funkcje f_n są ciągłe w punkcie x_0 należącym do ich wspólnej dziedziny D , to także funkcja graniczna f jest ciągła w x_0 .¹Funkcja f musi być ograniczona, aby norma supremum była liczbą skończoną. Na upartego można byłoby się umówić, że norma supremum funkcji nieograniczonej jest nieskończonością, ale raczej tego nie robimy.²Jak ktoś chce się silić na osłabianie naturalnych założeń, to może tylko założyć, że różnice $f_n - f$ są funkcjami ograniczonymi.³Określone na tej samej dziedzinie, co funkcje f_n .

Zapiszmy przy pomocy kwantyfikatorów warunki⁴, które zostały użyte w powyższym⁵ zdaniu:

Założenie: $f_n \rightrightarrows f$:

$$\forall_{\varepsilon > 0} \exists_{N \geqslant N} \forall_{n \geqslant N} \forall_{x_1 \in D} |f_n(x_1) - f(x_1)| < \varepsilon. \quad (Z1)$$

Założenie: f_n są ciągłe w x_0 :

$$\forall_{n \in \mathbb{N}} \forall_{\varepsilon > 0} \exists_{\delta > 0} \forall_{\substack{x_2 \in D \\ |x_2 - x_0| < \delta}} |f_n(x_2) - f_n(x_0)| < \varepsilon. \quad (Z2)$$

Teza: f jest ciągła w x_0 :

$$\forall_{\varepsilon > 0} \exists_{\delta > 0} \forall_{\substack{x \in D \\ |x - x_0| < \delta}} |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon. \quad (T)$$

Teraz główny element dowodu wygląda następująco: Dowodzimy warunku (T), przy czym możemy korzystać z warunków (Z1) i (Z2).

Warunek (T) mówi: Dla każdego ε istnieje taka δ , że coś tam. Czyli do epsilon musimy wskazać procedurę doboru odpowiedniej delty, a możemy przy tym korzystać z założeń (Z1) i (Z2).

Niech więc ε będzie dowolną liczbą dodatnią. Dobieramy do $\varepsilon/3$ liczbę N w warunku (Z1). To oznacza, że

$$\forall_{n \geqslant N} \forall_{x_1 \in D} |f_n(x_1) - f(x_1)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Ustalamy jakąkolwiek liczbę $n \geqslant N$. Wówczas dla tej liczby n zachodzi warunek:

$$\forall_{x_1 \in D} |f_n(x_1) - f(x_1)| < \frac{\varepsilon}{3}. \quad (1)$$

Dobieramy z warunku (Z2) deltę do $\varepsilon/3$ przy n ustalonym powyżej. Otrzymujemy wówczas

$$\forall_{\substack{x_2 \in D \\ |x_2 - x_0| < \delta}} |f_n(x_2) - f_n(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}. \quad (2)$$

Chcemy dowieść, że dobór δ do ε w/g powyższej receptury spełnia wymagania warunku (T), czyli że przy tym doborze

$$\forall_{\substack{x \in D \\ |x - x_0| < \delta}} |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon. \quad (TT)$$

Niech $x \in D$ spełnia warunek $|x - x_0| < \delta$.

Stosujemy:

Warunek (2) do $x_2 = x$:

$$|f_n(x) - f_n(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}. \quad (3)$$

Warunek (1) do $x_1 = x$:

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3}. \quad (4)$$

⁴Zamiast x_1 w warunku (Z1) oraz x_2 w warunku (Z2) naturalnie byłoby napisać x . Dodajemy jednak do x -ów indeksy, aby nie mieszały nam się x -y występujące w różnych warunkach.

⁵Zgodnie z tradycją, słowo "powyższy" odnosi się do zdania na dole poprzedniej strony.

Warunek (1) do $x_1 = x_0$:

$$|f_n(x_0) - f(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}. \quad (5)$$

Korzystając z nierówności trójkąta oraz z nierówności (3), (4) i (5) otrzymujemy

$$\begin{aligned} |f(x) - f(x_0)| &= |f(x) - f_n(x) + f_n(x) - f_n(x_0) + f_n(x_0) - f(x_0)| \leq \\ &\leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(x_0)| + |f_n(x_0) - f(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon \end{aligned}$$

co dowodzi warunku (TT), a tym samym kończy dowód warunku (T).

Widzimy więc, że granica jednostajnie zbieżnego ciągu ograniczonych funkcji ciągłych określonych na wspólnej dziedzinie jest funkcją ciągłą.

Ponieważ szeregi to ciągi inaczej podane, to samo można sformułować w odniesieniu do szeregu funkcyjnego: Suma jednostajnie zbieżnego szeregu ograniczonych funkcji ciągłych jest funkcją ciągłą. Jednak, aby z tego zrobić dobry użytek, będziemy się musieli nauczyć dowodzenia jednostajnej zbieżności niektórych szeregów funkcyjnych.

Tyle teorii na dziś.

A teraz trochę zadań na poćwiczenie szacowania i obliczania norm konkretnych funkcji.

418. Oszacować od góry (przez dowolną, ale konkretną liczbę) normę supremum funkcji $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ zdefiniowanej wzorem

$$f(x) = \frac{6x^6 - x^2 + 7}{8x^8 - x^4 + 11}.$$

Wskazówka: Oszacuj podane wyrażenie osobno w przypadkach $|x| < 1$ i $|x| \geq 1$

Zanim zajrzysz na kolejną stronę, rozwiąż powyższe zadanie, a przynajmniej podejmij próbę rozwiązania, aby wiedzieć, gdzie napotykasz trudności.

Rozwiązanie:

Oszacujemy wyrażenie definiujące funkcję f rozważając dwa przypadki:

1° Gdy $|x| < 1$, otrzymujemy:

$$\frac{6x^6 - x^2 + 7}{8x^8 - x^4 + 11} \leq \frac{6 - 0 + 7}{0 - 1 + 11} = \frac{13}{10}.$$

2° Gdy $|x| \geq 1$, otrzymujemy:

$$\frac{6x^6 - x^2 + 7}{8x^8 - x^4 + 11} \leq \frac{6x^6 - 0 + 7x^6}{8x^8 - x^8 + 0} = \frac{13}{7x^2} \leq \frac{13}{7}.$$

Wobec tego dla każdej liczby rzeczywistej x mamy

$$|f(x)| = f(x) \leq \frac{13}{7},$$

skąd wynika nierówność $\|f\| \leq 13/7$.

419. W każdym z zadań **419.1-419.15** podaj normę supremum funkcji f o podanym wzorze i dziedzinie.

419.1. $f(x) = 7 \sin x$, $D_f = \mathbb{R}$, $\|f\| =$

419.2. $f(x) = 7 \sin x - 3$, $D_f = \mathbb{R}$, $\|f\| =$

419.3. $f(x) = 7 \sin^2 x - 3$, $D_f = \mathbb{R}$, $\|f\| =$

419.4. $f(x) = 7 \sin^3 x - 3$, $D_f = \mathbb{R}$, $\|f\| =$

419.5. $f(x) = \log_2 x - 2$, $D_f = (\frac{1}{8}, 8)$, $\|f\| =$

419.6. $f(x) = \log_2 x - 2$, $D_f = (2, 32)$, $\|f\| =$

419.7. $f(x) = (\log_2 x)^2 - 6$, $D_f = (\frac{1}{8}, 4)$, $\|f\| =$

419.8. $f(x) = (\log_2 x)^3 - 6$, $D_f = (\frac{1}{8}, 4)$, $\|f\| =$

419.9. $f(x) = (\log_2 x)^4 - 6$, $D_f = (\frac{1}{8}, 4)$, $\|f\| =$

419.10. $f(x) = \sqrt{x^2 + 3x} - x$, $D_f = (1, +\infty)$, $\|f\| =$

419.11. $f(x) = \sqrt{x^2 + 8x} - x$, $D_f = (1, +\infty)$, $\|f\| =$

419.12. $f(x) = \sqrt[3]{x^3 + 7x^2} - x$, $D_f = (1, +\infty)$, $\|f\| =$

419.13. $f(x) = \sqrt[3]{x^3 + 26x^2} - x$, $D_f = (1, +\infty)$, $\|f\| =$

419.14. $f(x) = \sqrt[4]{x^4 + 15x^3} - x$, $D_f = (1, +\infty)$, $\|f\| =$

419.15. $f(x) = \sqrt[4]{x^4 + 80x^3} - x$, $D_f = (1, +\infty)$, $\|f\| =$

Zapisz swoje odpowiedzi i porównaj jutro z odpowiedziami poprawnymi.