

Dzień 38 (wtorek 12 maja 2020)**Zbieżność jednostajna (c.d.).**

Zaczynamy od odpowiedzi do wczorajszego zadania.

419. W każdym z zadań **419.1-419.15** podaj normę supremum funkcji f o podanym wzorze i dziedzinie.

419.1. $f(x) = 7 \sin x$, $D_f = \mathbb{R}$, $\|f\| = 7$

419.2. $f(x) = 7 \sin x - 3$, $D_f = \mathbb{R}$, $\|f\| = 10$

419.3. $f(x) = 7 \sin^2 x - 3$, $D_f = \mathbb{R}$, $\|f\| = 4$

419.4. $f(x) = 7 \sin^3 x - 3$, $D_f = \mathbb{R}$, $\|f\| = 10$

419.5. $f(x) = \log_2 x - 2$, $D_f = (\frac{1}{8}, 8)$, $\|f\| = 5$

419.6. $f(x) = \log_2 x - 2$, $D_f = (2, 32)$, $\|f\| = 3$

419.7. $f(x) = (\log_2 x)^2 - 6$, $D_f = (\frac{1}{8}, 4)$, $\|f\| = 6$

419.8. $f(x) = (\log_2 x)^3 - 6$, $D_f = (\frac{1}{8}, 4)$, $\|f\| = 33$

419.9. $f(x) = (\log_2 x)^4 - 6$, $D_f = (\frac{1}{8}, 4)$, $\|f\| = 75$

419.10. $f(x) = \sqrt{x^2 + 3x} - x$, $D_f = (1, +\infty)$, $\|f\| = 3/2$

419.11. $f(x) = \sqrt{x^2 + 8x} - x$, $D_f = (1, +\infty)$, $\|f\| = 4$

419.12. $f(x) = \sqrt[3]{x^3 + 7x^2} - x$, $D_f = (1, +\infty)$, $\|f\| = 7/3$

419.13. $f(x) = \sqrt[3]{x^3 + 26x^2} - x$, $D_f = (1, +\infty)$, $\|f\| = 26/3$

419.14. $f(x) = \sqrt[4]{x^4 + 15x^3} - x$, $D_f = (1, +\infty)$, $\|f\| = 15/4$

419.15. $f(x) = \sqrt[4]{x^4 + 80x^3} - x$, $D_f = (1, +\infty)$, $\|f\| = 20$

A teraz uzupełnienie wiadomości o zbieżności jednostajnej. Brakuje nam dwóch rzeczy:

- Jak sprawnie dowodzić¹ zbieżności jednostajnej szeregów funkcyjnych?
- Jak to jest z różniczkowalnością granicy ciągu lub sumy szeregu funkcyjnego?

Ponieważ nie jest celem wykładu nadmierne wchodzenie w szczegóły teoretyczne, ograniczę się do zaprezentowania najważniejszych twierdzeń.

W zakresie zbieżności szeregów funkcyjnych, zasadniczym kryterium jest odpowiednik kryterium zbieżności bezwzględnej dla szeregów liczbowych, z tym że moduł² jest zastąpiony normą³. A dokładniej:

Jeżeli dany jest taki szereg funkcyjny $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$, że szereg liczbowy $\sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|$ jest zbieżny, to szereg funkcyjny $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ jest jednostajnie zbieżny.

Zwracam uwagę, że szereg liczbowy $\sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|$ jest szeregiem o wyrazach nieujemnych i do dowodu jego zbieżności możemy wykorzystać odpowiednie kryteria z teorii szeregów liczbowych — najbardziej użyteczne wydają się kryterium porównawcze oraz kryteria d'Alemberta i Cauchy'ego.

Podobnie jak w przypadku szeregów liczbowych mamy odpowiednik warunku koniecznego zbieżności, który przybiera postać kryterium:

Przypominam: Jeżeli $a_n \not\rightarrow 0$, czyli $|a_n| \not\rightarrow 0$, to szereg liczbowy $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest rozbieżny.

Analogicznie:

Jeżeli $\|f_n\| \not\rightarrow 0$, to szereg funkcyjny $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ nie jest zbieżny jednostajnie⁴.

To załatwia problem jednostajnej zbieżności szeregów funkcyjnych w najprostszych⁵ przypadkach.

Zanim wyjaśnimy sobie sprawę różniczkowalności przy przejściu granicznym, popatrzmy na dwa przykłady ciągów funkcyjnych.

Przykład 1: Niech $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ będą określone wzorem:

$$f_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}}.$$

¹Napisałem "dowodzić", a nie "rozstrzygać", gdyż ze zbieżności jednostajnej możemy wyciągnąć daleko idące wnioski, a z braku zbieżności jednostajnej niewiele wynika. W konsekwencji bardziej ineresujące będą sytuacje, w których zbieżność jednostajna jest, niż takie, gdzie jej nie ma.

²Czyli miara wielkości liczby rzeczywistej.

³Normą supremum, czyli przyjętą przez nas miarą wielkości funkcji.

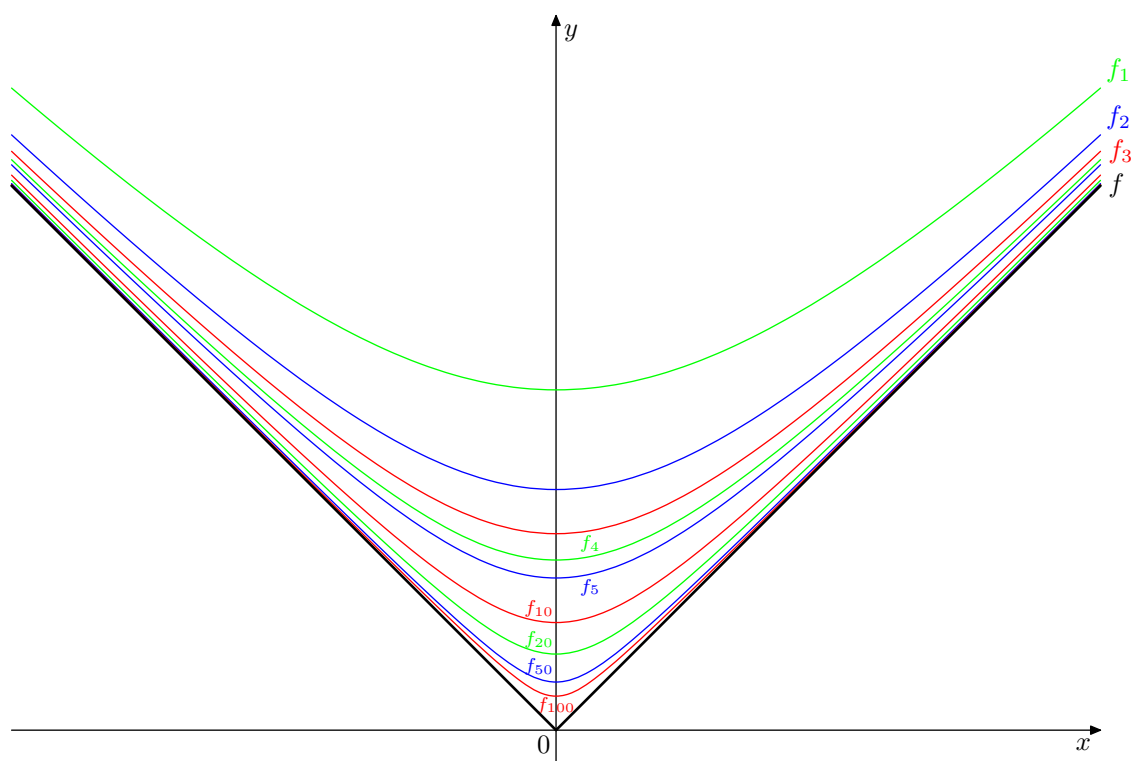
⁴Ale może być zbieżny punktowo !!! Dlatego nie na miejscu byłoby używanie w tym miejscu słowa "rozbieżny".

⁵A bardziej skomplikowanymi przykładami zajmować się nie będziemy.

Funkcje f_n są bardzo porządne — nieskończenie wiele razy różniczkowalne na całej prostej. Ponadto

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}} = \sqrt{x^2} = |x|,$$

skąd wynika, że ciąg funkcyjny (f_n) jest punktowo zbieżny do funkcji f określonej wzorem $f(x) = |x|$, co możemy zapisać jako $f_n \rightarrow f$. Wykresy tych funkcji są przedstawione na rysunku 1.



rys. 1

Z oszacowań

$$|f_n(x) - f(x)| = \left| \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}} - |x| \right| = \frac{1/n}{\sqrt{x^2 + \frac{1}{n}} + |x|} \leq \frac{1/n}{\sqrt{0 + \frac{1}{n}} + 0} = \frac{1}{\sqrt{n}},$$

w których przy $x=0$ zachodzi równość, wynika

$$\|f_n - f\| = \frac{1}{\sqrt{n}} \rightarrow 0 \quad \text{przy } n \rightarrow \infty.$$

Wobec tego $f_n \rightrightarrows f$.

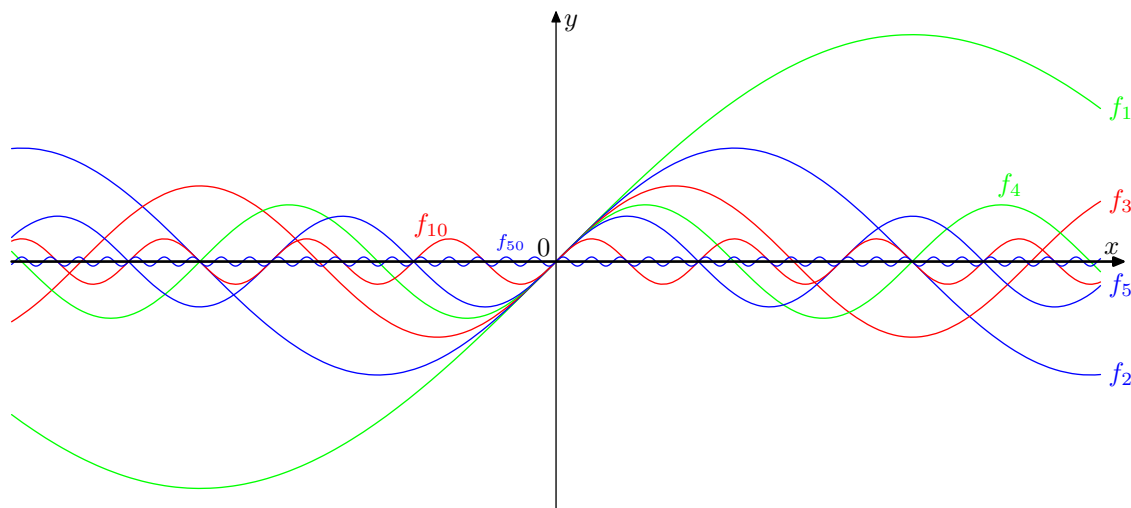
Podsumujmy: Mamy ciąg funkcyjny o bardzo porządnym wyrażeniu, zbieżny jednostajnie, czyli najlepiej jak w tej chwili umiemy zdefiniować. Ale graniczna funkcja nie jest różniczkowalna.

Morał: Granica jednostajnie zbieżnego ciągu funkcji różniczkowanych nie musi być różniczkowalna. Czyli **jednostajna zbieżność przy przejściu granicznym zachowuje ciągłość, ale różniczkowalności już nie musi.**

Przykład 2: Niech $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ będą określone wzorem:

$$f_n(x) = \frac{\sin nx}{n}.$$

Podobnie jak w poprzednim przykładzie, funkcje f_n są nieskończenie wiele razy różniczkowalne na całej prostej. Ich wykresy są przedstawione na rysunku 2.



rys. 2

Przyjmijmy $f(x) = 0$. Wówczas

$$\|f_n - f\| = \frac{1}{n} \rightarrow 0 \quad \text{przy } n \rightarrow \infty.$$

Wobec tego $f_n \rightrightarrows f$.

Pozornie jest lepiej niż w przykładzie 1, gdyż funkcja graniczna⁶ okazała się różniczkowalna nieskończenie wiele razy. Mamy też fajną⁷ zbieżność ciągu funkcyjnego.

Jednak w różniczkowalności funkcji granicznej jest trochę przypadkowości. Jeśli bowiem różniczkowalność funkcji granicznej ma być jakoś powiązana z różniczkowalnością funkcji będących wyrazami ciągu funkcyjnego, to należałoby oczekiwać, że

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(x) = f'(x),$$

czyli $f'_n \rightarrow f'$ (zbieżność punktowa ciągu pochodnych do pochodnej funkcji granicznej). Tymczasem

$$f'_n(x) = \cos nx,$$

skąd

$$f'_n(0) = 1 \rightarrow 1 \quad \text{przy } n \rightarrow \infty.$$

Ale $f'(0) = 0$.

⁶Czyli funkcja stała równa 0.

⁷Czyli jednostajną.

Okazuje się, że zbieżność jednostajną można w prosty⁸ sposób wzmocnić tak, aby przejście graniczne zachowywało różniczkowalność. Wystarczy założyć, że nie tylko zachodzi zbieżność jednostajna $f_n \rightrightarrows f$, ale także ciąg pochodnych (f'_n) jest jednostajnie zbieżny.

Sformułujmy to wyrażnie:

Niech (f_n) będzie ciągiem funkcyjnym⁹ jednostajnie¹⁰ zbieżnym do funkcji f . Jeżeli wszystkie funkcje f_n są różniczkowalne¹¹ i mają ciągłe pochodne, a ciąg pochodnych (f'_n) jest jednostajnie zbieżny, to graniczna funkcja f też jest różniczkowalna i przy tym f' jest ciągła. Ponadto $f'_n \rightrightarrows f'$, czyli granica ciągu pochodnych jest¹² pochodną funkcji granicznej.

To samo można przeformułować dla pochodnych wyższego rzędu:

Niech (f_n) będzie ciągiem funkcji mających ciągłe pochodne do rzędu m włącznie. Załóżmy, że ciąg ten jest zbieżny jednostajnie do f . Jeżeli dla $k=1, 2, 3, \dots, m$ ciąg $(f_n^{(k)})$ jest jednostajnie zbieżny, to funkcja f ma ciągłe pochodne do rzędu m włącznie i przy tym dla każdego $k=1, 2, 3, \dots, m$ i każdego x z dziedziny rozważanych funkcji mamy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n^{(k)}(x) = f^{(k)}(x).$$

Analogiczne twierdzenie zachodzi w przypadku szeregów funkcyjnych. Jeśli jednak uwzględnimy, że w zasadzie znamy tylko jeden sposób dowodzenia zbieżności szeregów funkcyjnych, schemat postępowania jest następujący:

Dany jest szereg funkcyjny¹³ $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$, którego wyrazy są funkcjami mającymi ciągłe pochodne do rzędu m włącznie. Jeżeli dla¹⁴ $k=0, 1, 2, \dots, m$ szereg liczbowy

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|f_n^{(k)}\|$$

⁸Prosty, gdy już wiemy to, co wiemy.

⁹Czyli zwykle założenia, że np. wszystkie funkcje f_n są określone na tej samej dziedzinie.

¹⁰W zasadzie to wystarczy jednostajna zbieżność na poziomie pochodnych, a na poziomie funkcji wystarczy założyć zbieżność punktową, a nawet tylko zbieżność wartości w jednym punkcie dziedziny, ale uważam, że formułowanie takich uogólnień przyniosłoby więcej szkody niż pożytku, bo łatwiej zapamiętać, że na obu poziomach (funkcji i ich pochodnych) ma być zbieżność jednostajna, niż pamiętać, że tu taka, a tu siaka.

¹¹A więc w tym jest założenie, że dziedzina tych funkcji jest na tyle porządna (przedział lub suma przedziałów), aby można było mówić o różniczkowalności.

¹²Z założenia wiemy, że ciąg (f'_n) jest jednostajnie zbieżny, a tu się okazuje, że nie do byle jakiej przypadkowej funkcji, tylko właśnie do f' .

¹³W tym miejscu można równie dobrze napisać $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ jak i $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$.

¹⁴Przypominam, że przyjmujemy iż funkcja jest swoją pochodną rzędu 0.

jest zbieżny¹⁵, to funkcja

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} f_n$$

ma ciągłe pochodne do rzędu m włącznie. Ponadto dla $k = 1, 2, 3, \dots, m$

$$f^{(k)} = \sum_{n=1}^{\infty} f_n^{(k)}.$$

Jutro rozwiążemy sobie trochę zadań z zastosowaniem tego schematu, a dziś na zakończenie parę słów o szeregach potęgowych — bardziej na zasadzie luźnej opowieści niż technicznego wykładu.

Otóż okazuje się, że jeśli szereg potęgowy ma promień zbieżności R , to w każdym przedziale $(-r, r)$, gdzie $r < R$, jest on jednostajnie zbieżny, a także jest tam jednostajnie zbieżny szereg pochodnych dowolnego rzędu jego wyrazów. Stąd wynika cały ten luksus: szereg potęgowy ma sumę nieskończenie wiele razy różniczkowalną i można go różniczkować wyraz za wyrazem.

¹⁵Przypomnijmy, że ze zbieżności szeregu liczbowego $\sum_{n=1}^{\infty} \|f_n^{(k)}\|$ wynika zbieżność jednostajna szeregu funkcyjnego $\sum_{n=1}^{\infty} f_n^{(k)}$.