

Dzień 39 (środa 13 maja 2020)**Zbieżność jednostajna (c.d.).**

Dziś porcja zadań do rozwiązania.

Przypominam schemat postępowania, na sformułowaniu którego wczoraj zakończyliśmy:

Dany jest szereg funkcyjny $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$, którego wyrazy są funkcjami mającymi ciągle pochodne do rzędu m włącznie. Jeżeli dla $k = 0, 1, 2, \dots, m$ szeregi liczbowe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|f_n^{(k)}\|$$

są zbieżne, to szeregi funkcyjne

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n^{(k)}$$

są jednostajnie zbieżne. Wówczas suma

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} f_n$$

ma ciągle pochodne do rzędu m włącznie, a ponadto dla $k = 1, 2, 3, \dots, m$ zachodzi

$$f^{(k)} = \sum_{n=1}^{\infty} f_n^{(k)}.$$

420. Dany jest szereg funkcyjny $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ o sumie F , gdzie funkcje f_n są dane wzorami

$$f_n(x) = \frac{\sin 2^n x}{333^n}.$$

Wyznaczyć największą liczbę naturalną m , dla której prawdziwe jest następujące zdanie: Funkcja F jest m -krotnie różniczkowalna, a ponadto dla każdej liczby całkowitej dodatniej $k \leq m$ zachodzi równość $F^{(k)} = \sum_{n=1}^{\infty} f_n^{(k)}$.

Zanim zajrzysz na kolejną stronę, rozwiąż powyższe zadanie, a przynajmniej podejmij próbę rozwiązania, aby wiedzieć, gdzie napotykasz trudności.

Rozwiązanie:

Wykażemy, że $m = 8$.

Dla liczb całkowitych nieujemnych $k \leq 8$ otrzymujemy

$$f_n^{(k)}(x) = \frac{2^{kn} \cdot \text{jakiśsinus } 2^n x}{333^n},$$

gdzie $f^{(0)} = f$, a "jakiśsinus" oznacza jedną z funkcji $\pm \sin$, $\pm \cos$. Zatem

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|f_n^{(k)}\| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{kn}}{333^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2^k}{333}\right)^n \leq \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{256}{333}\right)^n < +\infty,$$

skąd wynika jednostajna zbieżność szeregów funkcyjnych $\sum_{n=1}^{\infty} f_n^{(k)}$, a w konsekwencji możliwość 8-krotnego różniczkowania danego w zadaniu szeregu funkcyjnego wyraz za wyrazem.

Ponadto

$$f_n^{(9)}(x) = \frac{2^{9n} \cos 2^n x}{333^n} = \left(\frac{512}{333}\right)^n \cdot \cos 2^n x,$$

co dla $x = 0$ daje szereg rozbieżny $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{512}{333}\right)^n$. Zatem szereg funkcyjny $\sum_{n=1}^{\infty} f_n^{(9)}$ nie jest zbieżny (nawet punktowo), co dowodzi, że liczba $m = 9$ nie spełnia warunków zadania.

W rozwiązaniu wykorzystaliśmy zbieżność szeregu geometrycznego o ilorazie $256/333$ bezwzględnie mniejszym od 1 i rozbieżność szeregu geometrycznego o ilorazie $512/333$ większym od 1.

421. Niech $f_n(x) = \frac{\cos(n^3 \cdot x)}{n^{20}}.$

Wskazując odpowiednią liczbę całkowitą dodatnią k udowodnić, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} f_n^{(k)}$ jest jednostajnie zbieżny, ale szereg $\sum_{n=1}^{\infty} f_n^{(k+1)}$ nie jest jednostajnie zbieżny.

Zanim zajrzysz na kolejną stronę, rozwiąż powyższe zadanie, a przynajmniej podejmij próbę rozwiązania, aby wiedzieć, gdzie napotykasz trudności.

Rozwiązanie:

Najpierw zauważmy, że

$$f_n^{(k)}(x) = \frac{n^{3k} \cdot j\sin(n^3 \cdot x)}{n^{20}} = \frac{j\sin(n^3 \cdot x)}{n^{20-3k}},$$

gdzie $j\sin$ jest jedną z funkcji $\pm \sin$ lub $\pm \cos$. Zatem

$$\|f_n^{(k)}\| = \frac{1}{n^{20-3k}} = n^{3k-20}.$$

Jeżeli szereg liczbowy $\sum_{n=1}^{\infty} \|f_n^{(k)}\|$ jest zbieżny, to szereg funkcyjny $\sum_{n=1}^{\infty} f_n^{(k)}$ jest jednostajnie zbieżny.

Ponieważ

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|f_n^{(k)}\| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{20-3k}},$$

szereg ten jest zbieżny, o ile $20 - 3k > 1$, czyli dla $k \leq 6$.

W szczególności szereg funkcyjny $\sum_{n=1}^{\infty} f_n^{(6)}$ jest jednostajnie zbieżny.

Jeżeli $\|f_n^{(k)}\| \not\rightarrow 0$ przy $n \rightarrow \infty$, to szereg funkcyjny $\sum_{n=1}^{\infty} f_n^{(k)}$ nie jest jednostajnie zbieżny. Taką sytuację mamy np. dla $k = 7$, gdzie

$$\|f_n^{(7)}\| = n \rightarrow \infty.$$

Wobec tego szereg funkcyjny $\sum_{n=1}^{\infty} f_n^{(7)}$ nie jest jednostajnie zbieżny.

Odpowiedź: Warunki zadania są spełnione przez $k = 6$.

422. Dany jest szereg funkcyjny $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ o sumie F , gdzie funkcje f_n są dane wzorami

$$f_n(x) = \frac{\cos n^8 x}{n^{60}}.$$

Wyznaczyć największą liczbę naturalną m , dla której prawdziwe jest następujące zdanie: Funkcja F jest m -krotnie różniczkowalna, a ponadto dla każdej liczby całkowitej dodatniej $k \leq m$ zachodzi równość $F^{(k)} = \sum_{n=1}^{\infty} f_n^{(k)}$.

Zanim zajrzysz na kolejną stronę, rozwiąż powyższe zadanie, a przynajmniej podejmij próbę rozwiązania, aby wiedzieć, gdzie napotykasz trudności.

Rozwiązanie:

Wykażemy, że $m = 7$.

Dla liczb całkowitych nieujemnych $k \leq 7$ otrzymujemy

$$f_n^{(k)}(x) = \frac{\text{jakiśsinus } n^8 x}{n^{60-8k}},$$

gdzie $f^{(0)} = f$, a "jakiśsinus" oznacza jedną z funkcji $\pm \sin$, $\pm \cos$. Zatem

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|f_n^{(k)}\| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{60-8k}} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{60-8 \cdot 7}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} < +\infty,$$

skąd wynika jednostajna zbieżność szeregów funkcyjnych $\sum_{n=1}^{\infty} f_n^{(k)}$, a w konsekwencji możliwość 7-krotnego różniczkowania danego w zadaniu szeregu funkcyjnego wyraz za wyrazem.

Ponadto

$$f_n^{(8)}(x) = n^4 \cos n^8 x,$$

co dla $x = 0$ daje szereg rozbieżny $\sum_{n=1}^{\infty} n^4$. Zatem szereg funkcyjny $\sum_{n=1}^{\infty} f_n^{(8)}$ nie jest zbieżny (nawet punktowo), co dowodzi, że liczba $m = 8$ nie spełnia warunków zadania.

423. Niech

$$f_n(x) = \frac{\cos\left(\binom{2n}{n} \cdot x\right)}{\binom{3n}{n}^4}.$$

Wskazując odpowiednią liczbę całkowitą dodatnią k udowodnić, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} f_n^{(k)}$ jest jednostajnie zbieżny, ale szereg $\sum_{n=1}^{\infty} f_n^{(k+1)}$ nie jest jednostajnie zbieżny.

Zanim zajrzysz na kolejną stronę, rozwiąż powyższe zadanie, a przynajmniej podejmij próbę rozwiązania, aby wiedzieć, gdzie napotykasz trudności.

Rozwiązanie:

Zauważmy, że

$$f_n^{(k)}(x) = \frac{\binom{2n}{n}^k \cdot \text{jsin}\left(\binom{2n}{n} \cdot x\right)}{\binom{3n}{n}^4},$$

gdzie jsin jest jedną z funkcji $\pm \sin$ lub $\pm \cos$. Stąd

$$\|f_n^{(k)}\| = \frac{\binom{2n}{n}^k}{\binom{3n}{n}^4}. \quad (1)$$

Stosując kryterium d'Alemberta do szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|f_n^{(k)}\| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\binom{2n}{n}^k}{\binom{3n}{n}^4} \quad (2)$$

otrzymujemy

$$\begin{aligned} & \frac{\binom{2n+2}{n+1}^k}{\binom{3n+3}{n+1}^4} \cdot \frac{\binom{3n}{n}^4}{\binom{2n}{n}^k} = \frac{\binom{2n+2}{n+1}^k}{\binom{2n}{n}^k} \cdot \frac{\binom{3n}{n}^4}{\binom{3n+3}{n+1}^4} = \\ & = \left(\frac{(2n+1) \cdot (2n+2)}{(n+1)^2} \right)^k \cdot \left(\frac{(2n+1) \cdot (2n+2) \cdot (n+1)}{(3n+1) \cdot (3n+2) \cdot (3n+3)} \right)^4 \rightarrow \frac{4^k \cdot 4^4}{27^4} = \frac{2^{2k+8}}{3^{12}} = \left(\frac{2^{k+4}}{3^6} \right)^2 = g. \end{aligned}$$

Ponieważ $3^6 = 729$, zachodzą nierówności $2^9 < 3^6 < 2^{10}$. Zatem dla $k=5$ otrzymujemy $g < 1$. Wobec tego na mocy kryterium d'Alemberta szereg liczbowy (2) jest zbieżny, a w związku z tym szereg funkcyjny $\sum_{n=1}^{\infty} f_n^{(5)}$ jest jednostajnie zbieżny.

Odnosząc powyższe kryterium d'Alemberta do ciągu (1) otrzymujemy $g > 1$ dla $k=6$, skąd wynika, że ciąg liczbowy (1) jest rozbieżny do $+\infty$. W szczególności

$$\|f_n^{(6)}\| \not\rightarrow 0,$$

a w związku z tym szereg funkcyjny $\sum_{n=1}^{\infty} f_n^{(6)}$ nie jest jednostajnie zbieżny.

Odpowiedź: Warunki zadania są spełnione przez $k=5$.

424. Niech

$$f_n(x) = \frac{\cos(n! \cdot x)}{(3n)!}.$$

Wskazując odpowiednią liczbę całkowitą dodatnią k udowodnić, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} f_n^{(k)}$ jest jednostajnie zbieżny, ale szereg $\sum_{n=1}^{\infty} f_n^{(k+1)}$ nie jest jednostajnie zbieżny.

Zanim zajrzysz na kolejną stronę, rozwiąż powyższe zadanie, a przynajmniej podejmij próbę rozwiązania, aby wiedzieć, gdzie napotykasz trudności.

Rozwiązanie:

Niech $k = 3$. Wówczas

$$f_n^{(k)}(x) = f_n'''(x) = \frac{(n!)^3 \cdot \sin(n! \cdot x)}{(3n)!},$$

skąd

$$\|f_n'''\| = \frac{(n!)^3}{(3n)!}.$$

Stosując kryterium d'Alemberta do szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|f_n'''\| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^3}{(3n)!} \quad (3)$$

otrzymujemy

$$\frac{((n+1)!)^3}{(3n+3)!} \cdot \frac{(3n)!}{(n!)^3} = \frac{(n+1)^3}{(3n+1) \cdot (3n+2) \cdot (3n+3)} \rightarrow \frac{1}{27} < 1.$$

Zatem szereg liczbowy (3) jest zbieżny, a w związku z tym szereg funkcyjny $\sum_{n=1}^{\infty} f_n'''$ jest jednostajnie zbieżny.

Ponadto

$$f_n^{(k+1)}(x) = f_n^{(4)}(x) = \frac{(n!)^4 \cdot \cos(n! \cdot x)}{(3n)!},$$

skąd

$$\|f_n^{(4)}\| = \frac{(n!)^4}{(3n)!}. \quad (4)$$

Stosując kryterium d'Alemberta do ciągu (4) otrzymujemy

$$\frac{((n+1)!)^4}{(3n+3)!} \cdot \frac{(3n)!}{(n!)^4} = \frac{(n+1)^4}{(3n+1) \cdot (3n+2) \cdot (3n+3)} \rightarrow +\infty > 1.$$

Zatem ciąg liczbowy (4) jest rozbieżny do $+\infty$, skąd w szczególności

$$\|f_n^{(4)}\| \not\rightarrow 0,$$

a w związku z tym szereg funkcyjny $\sum_{n=1}^{\infty} f_n^{(4)}$ nie jest jednostajnie zbieżny.

Inne wnioskowanie: Z kryterium d'Alemberta jak wyżej, szereg $\sum_{n=1}^{\infty} f_n^{(4)}(0) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^4}{(3n)!}$ jest rozbieżny, więc $\sum_{n=1}^{\infty} f_n^{(4)}$ nie jest nawet punktowo zbieżny, a co dopiero jednostajnie.