Dzień 40 (czwartek 14 maja 2020)

Szeregi trygonometryczne.

Wielomian to funkcja określona wzorem postaci

$$\sum_{n=0}^{N} a_n x^n .$$

Liczba N jest stopniem[1] wielomianu. O szeregu potęgowym można myśleć jak o takim wielomianie nieskończonego[2] stopnia, gdzie zamiast skończonej sumy jednomianów mamy szereg funkcyjny:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n .$$

Na hasło wielomian trygonometryczny, nie znając obowiązującej definicji, można byłoby zareagować przypuszczeniem, że jest to wielomian dwóch zmiennych od $\sin x$ i $\cos x$, czyli jakiekolwiek wyrażenie, które można uzyskać z $\sin x$, $\cos x$ i liczb rzeczywistych przy użyciu trzech działań (dodawania, odejmowania i mnożenia). Innymi słowy jest to skończona suma wyrażeń postaci $c\cdot\sin^j x\cdot\cos^k x$, gdzie c jest liczbą rzeczywistą, a j oraz k są liczbami całkowitymi nieujemnymi[3].

W przeciwieństwie do zwykłych wielomianów, tak rozumiane wielomiany trygonometryczne nie mają jednoznacznej[4] postaci, bo np. $\sin^2 x+\cos^2 x=1$. A jeszcze więcej niejednoznaczności się pojawi, kiedy dopuścimy wyrażenia $\sin nx$ oraz $\cos nx$, które jak wiemy[5] wyrażają się przez $\sin x$ i $\cos x$. Okazuje się jednak, że każdy wielomian trygonometryczny można zapisać w postaci kombinacji liniowej wyrażeń $\sin nx$ oraz $\cos nx$, czyli jako[6]

$$a_0+\sum_{n=1}^{N}\left(a_n\cos nx+b_n\sin nx\right) .$$

Co więcej, takie przedstawienie okazuje się być jednoznaczne[7].

[1] O ile $a_N\neq 0$.

[2] Potencjalnie nieskończonego, bo szereg potęgowy może mieć prawie wszystkie wyrazy zerowe i wówczas jego suma jest prawdziwym wielomianem skończonego stopnia.

[3] Przy konwencji, że $\sin^0 x=\cos^0 x=1$, bez rozczulania się nad tym, że $\sin x$ i $\cos x$ mogą być równe 0. Podobnie zresztą traktowaliśmy x^0 przy wielomianach przyjmując $x^0=1$.

[4] Jednoznaczność postaci można byłoby wymusić ustalając np., że $\sin x$ nie będzie występować w potędze większej niż pierwsza, ale to tylko taka uwaga na marginesie, bo nie jest to w centrum naszego zainteresowania w tym momencie.

[5] Pamiętacie? **Władca Sinusów.**

[6] Dla $n=0$ otrzymujemy $\cos 0x=1$, co ma odzwierciedlenie w składniku a_0 przed sumą. Natomiast $\sin 0x=0$ i nie ma sensu w żaden sposób tego uwzględniać w ogólnej postaci wielomianu trygonometrycznego.

[7] Nie oczekuję, że ktokolwiek będzie widział w tym momencie, że takie przedstawienie jest jednoznaczne. Celem tej części wykładu nie jest jednak systematyczne wyłożenie teorii, ale naszkicowanie zagadnień, które wykraczają poza główny nurt podstawowych wykładów z rachunku różniczkowego i całkowego, ale powinny zostać wspomniane w uniwersyteckim wykładzie z analizy.

Jeśli teraz napiszemy taki wielomian trygonometryczny o nieskończenie wielu składnikach:

$$a_0+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)\;, \qquad (\spadesuit)$$

to otrzymamy pewien szereg funkcyjny, zwany **szeregiem trygonometrycznym.** Szereg taki możemy sobie napisać dla dowolnych współczynników rzeczywistych a_n, b_n, tylko musimy się liczyć z tym, że w wielu przypadkach dostaniemy szereg funkcyjny albo wszędzie rozbieżny, albo zbieżny na tak małym zbiorze, że niewiele ciekawego da się z jego sumą zrobić[8].

Wczorajsze zadania **420-424** oraz zadania **437-442** z listy nr 11 dają nam jednak pozytywne przykłady w tym zakresie. Występują tam szeregi trygonometryczne[9], które są zbieżne na całej prostej, a ich sumy wykazują różnego rodzaju regularność: od ciągłości do wielokrotnej różniczkowalności.

Wyobraźmy sobie teraz, że mamy dany szereg trygonometryczny zbieżny[10] na całej prostej i niech f będzie jego sumą. Oczywiście f jest funkcją okresową o okresie 2π, bo taki okres mają wszystkie wyrazy szeregu trygonometrycznego.

Mamy więc

$$f(x)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)\;.$$

I zadajmy analogiczne pytanie jak w przypadku szeregów potęgowych: Czy[11] znając funkcję f, o której wiemy, że jest sumą szeregu trygonometrycznego, można odtworzyć współczynniki tego szeregu?

Przyjmijmy, że możemy beztrosko[12] wykonywać różne operacje, które zaraz się pojawią. Ale zanim do tych beztroskich operacji dojdziemy, zbierzmy sobie trochę wartości pewnych całek oznaczonych.

[8]Takim szeregiem jest np. szereg trygonometryczny

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(n\cdot 3^n\cdot x)}{n}$$

rozważany na wykładzie 7 maja (`korona35.pdf`), który to szereg jest rozbieżny na gęstym zbiorze. Jednak to nie jest jeszcze najgorzej, bo ten szereg w wielu punktach jest zbieżny. Ale jakbyśmy napisali do wiwatu szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty}n^{n^{n^n}}\cdot\cos nx\,,$$

to byłoby trudno wskazać jakikolwiek punkt, w którym jest on zbieżny. A faktycznie jest on wszędzie rozbieżny, czego udowodnienie wymaga trochę więcej wiedzy lub pokombinowania.

[9]Chociaż zapisane w nieco innej postaci niż ($\spadesuit$) ze względu na to, że pominięte są wyrazy zerowe, a numeracja wyrazów szeregu nie zawsze odpowiada numeracji ze wzoru ($\spadesuit$).

[10]Jakoś tam zbieżny, nie precyzuję dokładnie. Z jednej strony zadowala mnie zbieżność punktowa, ale w razie potrzeby mogę założyć zbieżność jednostajną — przy takim założeniu otrzymam ciągłość funkcji będącej sumą tego szeregu.

[11]I ewentualnie: jak?

[12]To można byłoby poprzeć odpowiednimi twierdzeniami wykraczającymi poza zakres wykładu.

Rozważane całki będą miały przedział całkowania długości[13] 2π, a funkcja podcałkowa będzie iloczynem dwóch spośród funkcji występujących w szeregu trygonometrycznym, czyli określonych wzorami: 1 (stała), $\sin nx$, $\cos nx$. Obliczenie wartości tych całek nie powinno nastręczać trudności[14], ograniczę się więc do zebrania wyników:

$$\int_0^{2\pi} 1\cdot 1\,dx = 2\pi\,,$$

$$\int_0^{2\pi} 1\cdot \cos nx\,dx = 0\,,$$

$$\int_0^{2\pi} 1\cdot \sin nx\,dx = 0\,,$$

$$\int_0^{2\pi} \cos nx\cdot \cos nx\,dx = \pi\,,$$

$$\int_0^{2\pi} \cos nx\cdot \cos mx\,dx = 0\,, \qquad (m\neq n)$$

$$\int_0^{2\pi} \sin nx\cdot \sin nx\,dx = \pi\,,$$

$$\int_0^{2\pi} \sin nx\cdot \sin mx\,dx = 0\,, \qquad (m\neq n)$$

$$\int_0^{2\pi} \cos nx\cdot \sin mx\,dx = 0\,.$$

Najważniejsze spostrzeżenie dotyczące powyższych wyników jest następujące:

Całka z iloczynu dwóch różnych spośród funkcji:

1 (stała), $\sin nx$, $\cos nx$ jest zerem.

Jeśli teraz

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

[13]Wszystko jedno, jaki przedział długości 2π, gdyż funkcje podcałkowe mają okres 2π.

[14]A poza tym nie jest w tej chwili najważniejsze, abyśmy te całki szczegółowo wyliczali. Upewnij się jednak, że w razie potrzeby umiesz je wyliczyć.

i jeśli założymy pełną beztroskę[15] w wykonywanych rachunkach, to otrzymamy:

$$\int_0^{2\pi} f(x)\,dx = \int_0^{2\pi} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos nx + b_n \sin nx\right)\,dx =$$

$$= a_0 \cdot \underbrace{\int_0^{2\pi} dx}_{=2\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cdot \underbrace{\int_0^{2\pi} \cos nx\,dx}_{=0} + b_n \cdot \underbrace{\int_0^{2\pi} \sin nx\,dx}_{=0} \right) = 2\pi a_0\,,$$

skąd

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_0^{2\pi} f(x)\,dx\,.$$

Podobnie[16]

$$\int_0^{2\pi} f(x) \cdot \cos nx\,dx = \int_0^{2\pi} a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos kx + b_k \sin kx\right) \cdot \cos nx\,dx =$$

$$= a_0 \cdot \underbrace{\int_0^{2\pi} \cos nx\,dx}_{=0} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cdot \underbrace{\int_0^{2\pi} \cos kx \cdot \cos nx\,dx}_{\substack{=0 \text{ dla } k\neq n \\ =\pi \text{ dla } k=n}} + b_k \cdot \underbrace{\int_0^{2\pi} \sin kx \cdot \cos nx\,dx}_{=0} \right) = \pi a_n\,,$$

skąd

$$a_n = \frac{1}{\pi} \cdot \int_0^{2\pi} f(x) \cdot \cos nx\,dx\,.$$

Analogicznie

$$\int_0^{2\pi} f(x) \cdot \sin nx\,dx = \int_0^{2\pi} a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos kx + b_k \sin kx\right) \cdot \sin nx\,dx =$$

$$= a_0 \cdot \underbrace{\int_0^{2\pi} \sin nx\,dx}_{=0} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cdot \underbrace{\int_0^{2\pi} \cos kx \cdot \sin nx\,dx}_{=0} + b_k \cdot \underbrace{\int_0^{2\pi} \sin kx \cdot \sin nx\,dx}_{\substack{=0 \text{ dla } k\neq n \\ =\pi \text{ dla } k=n}} \right) = \pi b_n\,,$$

skąd

$$b_n = \frac{1}{\pi} \cdot \int_0^{2\pi} f(x) \cdot \sin nx\,dx\,.$$

[15] A dokładniej: założymy, że w tym wypadku całka sumy jest sumą całek, tyle że w grę wchodzą sumy nieskończone — szereg funkcyjny pod całką i szereg liczbowy całek oznaczonych.

[16] Po zmianie zmiennej sumowania z zajętej w tym momencie literki n na literkę k.

Wniosek: Jeżeli

$$f(x)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos nx+b_n\sin nx\right) ,$$

to

$$a_0=\frac{1}{2\pi}\cdot\int_0^{2\pi}f(x)\,dx , \tag{F0}$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\cdot\int_0^{2\pi}f(x)\cdot\cos nx\,dx \tag{FA}$$

oraz

$$b_n=\frac{1}{\pi}\cdot\int_0^{2\pi}f(x)\cdot\sin nx\,dx . \tag{FB}$$

Powyższe wzory pozwalają[17] więc odtworzyć współczynniki zbieżnego szeregu trygonometrycznego na podstawie znajomości funkcji będącej jego sumą.

Zwróćmy jednak uwagę, że wzory $(F0)$, (FA) i (FB) możemy zastosować do funkcji f nie wiedząc, czy jest ona sumą szeregu trygonometrycznego. Wystarczy, aby funkcja f była funkcją okresową[18] o okresie 2π i na tyle regularną[19], aby występujące w tych wzorach całki miały sens.

Zatem z odpowiednią[20] funkcją f możemy związać szereg trygonometryczny

$$a_0+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos nx+b_n\sin nx\right) , \tag{$\spadesuit$}$$

gdzie współczynniki a_0, a_n i b_n dane są wzorami $(F0)$, (FA) i (FB).

Taki szereg nazywamy **szeregiem Fouriera funkcji f**.

Przypomnijmy: W przypadku szeregów potęgowych też mieliśmy procedurę odzyskania współczynników na podstawie funkcji będącej sumą szeregu. Ta procedura pozwalała związać z nieskończenie różniczkowalną funkcją szereg potęgowy — szereg Taylora, który był jedynym kandydatem na rozwinięcie funkcji w szereg potęgowy. Niestety, przykłady pokazywały, że szereg Taylora może być rozbieżny wszędzie poza zerem, a nawet jak jest zbieżny, to jego suma nie musi być wyjściową funkcją.

Czy w przypadku szeregu Fouriera też czekają nas takie przykre niespodzianki? Okazuje się, że tu jest o wiele lepiej. Przy minimalnych założeniach o funkcji, jest ona sumą swojego szeregu Fouriera. Ale o szczegółach opowiem Wam jutro.

---

[17] Jeszcze raz do znudzenia powtórzę: wszystko przy założeniu, że nasze beztroskie rozbijanie całki na nieskończoną sumę całek jest poprawne. Jest poprawne, ale nie będziemy tego dowodzić.

[18] Formalnie, to wzory $(F0)$, (FA) i (FB) tak jak stoją możemy stosować bez założenia okresowości funkcji f, ale mówiliśmy wcześniej, że całki są po jakimkolwiek przedziale długości 2π, którego wybór nie ma znaczenia w przypadku funkcji okresowej. Tak więc bez założenia okresowości funkcji f cała zabawa byłaby mało sensowna.

[19] Ciągłość w zupełności wystarczy. Ale niezbyt dużo punktów nieciągłości też mamy szansę przeżyć. A przy dobrych układach, to f może mieć nawet osobliwość, o ile prowadzi ona do zbieżnych całek niewłaściwych.

[20] Okresową i regularną (czyli całkowalną).