Dzień 42 (poniedziałek 18 maja 2020)

Iloczyn skalarny w przestrzeni funkcji.

Najpierw trzeba sobie wyjaśnić czym jest[1] iloczyn skalarny. Zapewne kojarzycie go z iloczynem skalarnym w przestrzeni[2] $\mathbb{R}^3$. Błogosławieństwem i przekleństwem tej przestrzeni jest naturalna, wynikająca z definicji struktura polegająca na tym, że każdy element tej przestrzeni ma w naturalny sposób przypisaną trójkę współrzędnych, powiedzmy[3] (x, y, z). W konsekwencji mamy jak na tacy podaną bazę $\mathbb{R}^3$ jako przestrzeni liniowej oraz iloczyn skalarny i elementy związanej z nim geometrii euklidesowej (długości wektorów i kąty między wektorami). Niestety, ceną za to jest utrudnione zrozumienie, że iloczyn skalarny mógłby wyglądać inaczej, i że mógłby prowadzić do innych geometrii.

Skoncentrujmy się na razie na płaszczyźnie — niektóre rzeczy będzie łatwiej sobie wyobrazić niż w przestrzeni. Płaszczyznę jako $\mathbb{R}^2$ możemy sobie wyobrazić jako nieskończoną kartkę papieru z narysowanymi i wyskalowanymi osiami. Na takiej płaszczyźnie każdy punkt ma w naturalny sposób przypisane współrzędne (x, y). Taka płaszczyzna ma naturalną strukturę przestrzeni liniowej[4]. Ale ma też dodatkową strukturę wynikającą z naturalnego iloczynu skalarnego: długości wektorów i kąty między wektorami. I na dodatek ta przestrzeń liniowa ma naturalną bazę, na którą składają się wersory obu osi.

Pomyślmy teraz o nieskończonej sztywnej[5] kartce papieru, na której nie ma żadnych osi, a jedynie zaznaczony jest jeden punkt, w domyśle początek potencjalnego układu współrzędnych[6]. Na tej płaszczyźnie nie ma naturalnej bazy[7], za to jest struktura przestrzeni liniowej i jest naturalny iloczyn skalarny (bo są dobrze zdefiniowane odległości i kąty).

Wreszcie wyobraźmy sobie luźno utkaną tkaninę. Tkanina ta składa się z włókien, z których część biegnie w jednym kierunku, a część w drugim. Włókna są na tyle szorstkie, że nie ślizgają się jedne po drugich[8]. Jednak tkanina jest na tyle luźno utkana, że kąt pomiędzy włóknami obu kierunków może się zmieniać[9]. Na tej tkaninie zaznaczony jest

---

[1] Czym jest, czyli o co w nim naprawdę chodzi. Sucha formalna definicja sama w sobie niewiele wyjaśni.

[2] Lub na płaszczyźnie $\mathbb{R}^2$.

[3] Pozwolę sobie używać poziomej notacji współrzędnych wektora. Graficznie jest ona czytelniejsza, zwłaszcza gdy współrzędnych zrobi się bardzo dużo. Ale gdybyśmy chcieli odwoływać się do różnych niuansów algebry liniowej, to notacja pionowa byłaby w zasadzie koniecznością.

[4] Jeśli ktoś elementy przestrzeni liniowej nazywa wektorami, a wektory kojarzy ze strzałkami, to świetnie: każdy punkt można utożsamić z wektorem zaczepionym w początku układu współrzędnych, o końcu w danym punkcie.

[5] Sztywność między innymi oznacza, że ustalone są odległości między punktami tej kartki.

[6] W którym to punkcie ewentualnie będziemy zaczepiać wektory, jeśli chcemy punkty płaszczyzny utożsamić z wektorami-strzałkami.

[7] Oczywiście bazę można znaleźć, ale to wymaga dokonania jakiegoś wyboru.

[8] Czyli efekt jest taki jakby każde dwa włókna biegnące w różnych kierunkach były trwale złączone w ich punkcie przecięcia.

[9] Ale przyjmujemy, że przy deformacji tkaniny włókna pozostają prostoliniowe. Ponadto dla lepszego dostosowania tej sytuacji do naszej wyobraźni założymy, że włókna są nierozciągliwe.

punkt (czerwony na rys. 1 i 2). Jeżeli narysujemy dwa wektory zaczepione w tym punkcie oraz ich sumę, a następnie zaczniemy deformować tkaninę, to cały czas będzie na niej narysowana trójka wektorów, z których jeden jest sumą dwóch pozostałych. Można powiedzieć, że struktura przestrzeni liniowej jest niewrażliwa na deformację tkaniny. Jednak naturalnego iloczynu skalarnego na tej tkaninie już nie ma, bo nie ma ustalonych odległości między punktami oraz miar kątów — jedne i drugie zmieniają się w czasie deformacji.

Rozważmy teraz przestrzeń liniową, w której nie ma narzucającej się struktury prowadzącej do naturalnego zdefiniowania odległości, czy też iloczynu skalarnego. Niech V będzie przestrzenią liniową[10] wielomianów stopnia co najwyżej 2, przy czym myślmy o tych wielomianach bardziej jak o funkcjach niż o wzorach[11] które je definiują.

Formalną definicję ogólnego iloczynu skalarnego poznacie na algebrze liniowej. Ja chciałbym się tu skoncentrować na konstruowaniu różnych przykładów. Standardowy iloczyn skalarny w $\mathbb{R}^3$, czy też w $\mathbb{R}^n$, jest sumą jakichś iloczynów[12]. W rozważanej przestrzeni liniowej V dobrze zdefiniowanym iloczynem skalarnym jest na przykład suma iloczynów wartości wielomianów w punktach 0, 1 i 2:

$$\langle P, Q\rangle = P(0)\cdot Q(0)+P(1)\cdot Q(1)+P(2)\cdot Q(2)\,.$$

A innym iloczynem skalarnym[13] jest suma iloczynów wartości wielomianów w punktach 2, 3, 5 i 7:

$$\langle P, Q\rangle = P(2)\cdot Q(2)+P(3)\cdot Q(3)+P(5)\cdot Q(5)+P(7)\cdot Q(7)\,.$$

Za iloczyn skalarny może być też przyjęta suma iloczynów wartości wielomianów w punktach od 0 do 1 co jedną tysięczną:

$$\langle P, Q\rangle = \sum_{k=0}^{1000} P\left(\frac{k}{1000}\right)\cdot Q\left(\frac{k}{1000}\right)\,.$$

A skoro może być to suma iloczynów wartości wielomianów w bardzo wielu punktach, to łatwo sobie wyobrazić sytuację graniczną, gdzie zamiast sumy pojawia się całka, na przykład można przyjąć za iloczyn skalarny:

$$\langle P, Q\rangle = \int_0^1 P(x)\cdot Q(x)\,dx$$

albo jak ktoś ma fantazję i chce upamiętnić dzisiejszą datę:

$$\langle P, Q\rangle = \int_{1805}^{2020} P(x)\cdot Q(x)\,dx\,.$$

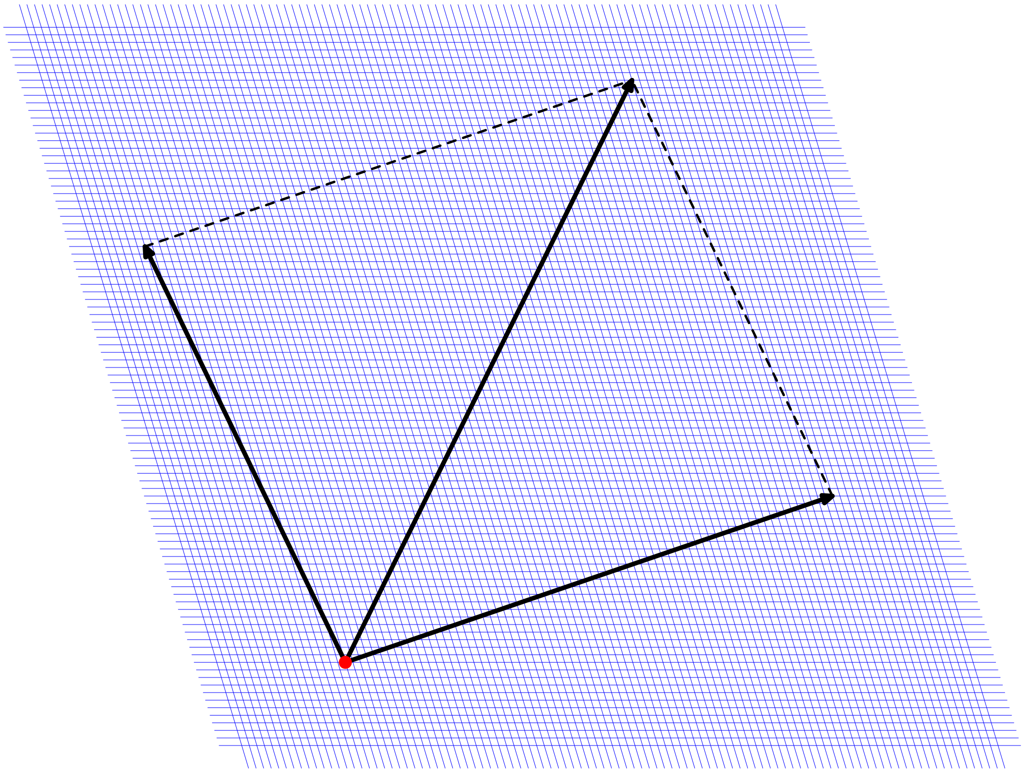
Mamy więc pięć iloczynów skalarnych w tej samej przestrzeni liniowej. Można oczywiście oceniać, że jedne są bardziej sztuczne od innych, ale o żadnym z nich nie można powiedzieć, że to jest ten najlepszy, najbardziej naturalny, najbardziej narzucający się.

[10] Z naturalnymi działaniami.

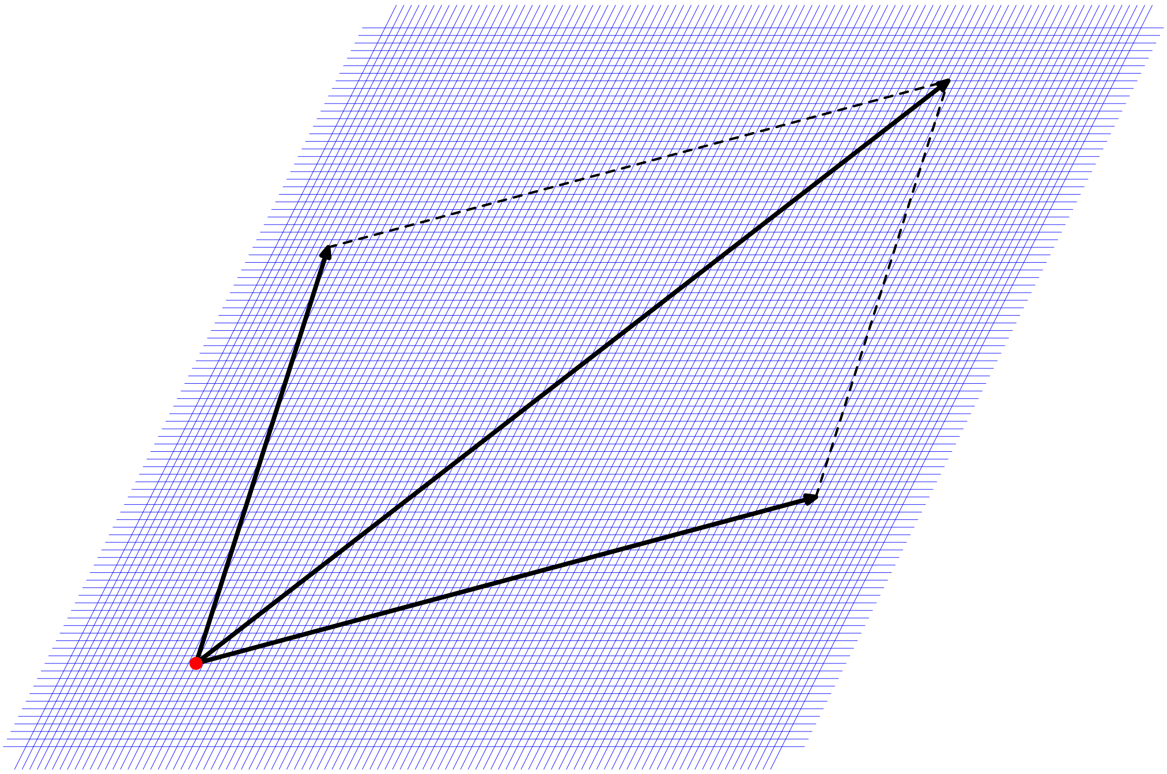
[11] Gdybyśmy kojarzyli te wielomiany z napisami ax^2+bx+c, to byłby tylko krok od utożsamienia takiego wielomianu z punktem (a,b,c) przestrzeni $\mathbb{R}^3$, a tego nie chemy.

[12] Sumą iloczynów współrzędnych, ale to doprecyzowanie celowo przemilczę, bo chcę się oderwać od jakiegolwiek sugerowania współrzędnych.

[13] Uwielbianym przez miłośników liczb pierwszych.



rys. 1



rys. 2

Po tym wstępie dotyczącym iloczynu skalarnego wróćmy do funkcji okresowych o okresie 2π określonych na $\mathbb{R}$. Nie będę dokładnie precyzował, o jaki zbiór funkcji mi chodzi, bo w zależności od sytuacji chciałbym rozważać nieco inne zbiory. Ważne, aby zbiór ten wraz z naturalnymi działaniami tworzył przestrzeń liniową, co przy sensownie zdefiniowanych zbiorach funkcji sprowadza się do tego, aby zbiór był zamknięty na dodawanie funkcji. Może to być zbiór wszystkich funkcji ciągłych[14]. A możemy dopuszczać nieciągłości typu skoku, gdzie w punktach nieciągłości istnieją granice jednostronne, a wartość funkcji jest średnią arytmetyczną tych granic[15]. Ale też nie będziemy się bali dorzucić do zbioru funkcji nieograniczonej, jeśli będzie ona prowadziła do zbieżnych całek niewłaściwych. Z drugiej zaś strony w niektórych sytuacjach możemy chcieć do ciągłości dodać warunki prowadzące do zbieżnego szeregu Fouriera. Na myśl przychodzi założenie, że funkcja jest przedziałami monotoniczna, ale to zły pomysł, bo nie prowadzi do przestrzeni liniowej[16]. Można z tego wybrnąć warunkami typu wahania skończonego[17], ale nie będę wchodził w szczegóły. Dość, że rozważać będziemy jakąś przestrzeń liniową funkcji — można myśleć o funkcjach ciągłych i mieć z tyłu głowy ewentualne modyfikacje.

W duchu sumy iloczynu lub całki z iloczynu, dla funkcji okresowych dość naturalne wydaje się przyjęcie iloczynu skalarnego jako całki z iloczynu[18] po pełnym okresie[19]:

$$\langle f, g\rangle = \int_0^{2\pi} f(x)\cdot g(x)\, dx\,.$$

W języku tak zdefiniowanego iloczynu skalarnego możemy zapisać całki ze strony 299 (korona40 z 14 maja) jako[20]:

$$\langle 1, 1\rangle = 2\pi, \qquad \langle \cos nx, \cos nx\rangle = \pi, \qquad \langle \sin nx, \sin nx\rangle = \pi,$$

[14] Cały czas ograniczamy się do funkcji okresowych o okresie 2π określonych na $\mathbb{R}$.

[15] Ponieważ iloczyn skalarny będzie definiowany przy pomocy całki oznaczonej, a całka nie dostrzega zmiany wartości funkcji w pojedynczych punktach, musimy wykluczyć funkcje, które zerowałyby się poza skończenie wieloma punktami w każdym okresie. Iloczyn skalarny nie odróżniałby takich funkcji od funkcji zerowej. W konsekwencji jakkolwiek określimy zbiór rozważanych funkcji, nie możemy dopuszczać dowolnej zmiany wartości funkcji w pojedynczym punkcie. Warunek ze średnią granic jednostronnych wyklucza takie zmiany.

[16] Suma funkcji przedziałami monotonicznych może nie być przedziałami monotoniczna.

[17] Czasami można spotkać to pojęcie pod nazwą: wahanie ograniczone.

[18] Ewentualnie można tę całkę podzielić przez π przyjmując

$$\langle f, g\rangle = \frac{1}{\pi}\cdot \int_0^{2\pi} f(x)\cdot g(x)\, dx\,,$$

co w tym momencie może się wydawać nieco sztuczne, ale pozwala uniknąć czynnika π lub $\sqrt{\pi}$ w innym miejscu teorii.

[19] Oczywiście przedział całkowania może być dowolnym przedziałem długości 2π.

[20] Pewne wątpliwości może budzić zapis typu $\langle \sin 2x, \cos 3x\rangle$ czy $\langle 1, \sin 5x\rangle$, gdyż skalarnie mnożymy funkcje, a nie wartości funkcji w punkcie. To się jednak daje obronić traktując to jako skrócone formy w pełni sformalizowanych, ale niezbyt poręcznych zapisów

$$\langle (\sin 2x : x\in\mathbb{R}), (\cos 3x : x\in\mathbb{R})\rangle \qquad \text{oraz} \qquad \langle (1 : x\in\mathbb{R}), (\sin 5x : x\in\mathbb{R})\rangle\,.$$

Przypomnienie: $f = (f(x) : x\in D_f) = \{(x, f(x)) : x\in D_f\}$.

$$\langle 1, \cos nx\rangle = 0, \qquad \langle 1, \sin nx\rangle = 0, \qquad \langle \cos nx, \sin mx\rangle = 0,$$

$$\langle \cos nx, \cos mx\rangle = 0, \qquad \langle \sin nx, \sin mx\rangle = 0. \qquad \text{(oba wzory dla } m \neq n\text{)}$$

Możemy więc powiedzieć, że funkcje określone wzorami: 1 (stała), $\sin nx$, $\cos nx$ tworzą układ ortogonalny[21].

Natomiast funkcje określone wzorami:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \qquad \frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}}, \qquad \frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}} \tag{$\diamondsuit$}$$

tworzą układ ortonormalny[22].

Powstaje naturalne pytanie: Czy ten układ funkcji jest czymś w rodzaju bazy, to znaczy, czy w jakiś sposób wyznacza przestrzeń liniową rozważanych funkcji? I tak i nie.

Odpowiedź "nie" to odpowiedź algebry liniowej, która w przestrzeni funkcji widzi przestrzeń liniową, a więc taką, gdzie możliwe jest tylko branie skończonych kombinacji liniowych wektorów. W konsekwencji podany wyżej układ funkcji generuje przestrzeń liniową wielomianów trygonometrycznych.

Odpowiedź "tak" to odpowiedź analizy, która dopuszcza przejścia graniczne, a więc także nieskończone sumy przyjmujące postać szeregów zbieżnych. Okazuje się, że podany wyżej układ funkcji jest zupełny, to znaczy, że jedyną funkcją ciągłą prostopadłą do wszystkich funkcji tego układu jest funkcja zerowa.

Jeżeli $e_1,\ldots,e_n$ jest bazą ortonormalną skończenie wymiarowej przestrzeni liniowej, to możemy sobie wyobrazić $e_1,\ldots,e_n$ jako wersory[23] poszczególnych osi skierowanych we wzajemnie prostopadłych kierunkach. Wówczas k-ta współrzędna wektora v jest dana wzorem $\langle v, e_k\rangle$ i w konsekwencji

$$v = \sum_{k=1}^{n} \langle v, e_k\rangle \cdot e_k\,.$$

Jeżeli teraz wyobrazimy sobie nieskończenie wymiarowy odpowiednik przestrzeni euklidesowej $\mathbb{R}^n$, to możemy sobie wyobrazić nieskończenie wiele wersorów $e_1,e_2,e_3,\ldots$ nieskończenie wielu osi skierowanych we wzajemnie prostopadłych kierunkach. Wówczas k-ta współrzędna wektora v jest dana wzorem $\langle v, e_k\rangle$ i w konsekwencji należałoby oczekiwać, że

$$v = \sum_{k=1}^{\infty} \langle v, e_k\rangle \cdot e_k\,.$$

Jeśli w przestrzeni funkcji na poszczególnych osiach położymy funkcje ($\diamondsuit$), to powinniśmy oczekiwać dla okresowej funkcji ciągłej f wzoru

$$f(x) = \left\langle \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, f\right\rangle \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\left\langle \frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}}, f\right\rangle \cdot \frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}} + \left\langle \frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}}, f\right\rangle \cdot \frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}} \right),$$

[21] Czyli taki układ wektorów przestrzeni liniowej z iloczynem skalarnym, że wektory tego układu są wzajemnie prostopadłe.

[22] Czyli taki układ wektorów przestrzeni liniowej z iloczynem skalarnym, że wektory tego układu są wzajemnie prostopadłe, a ponadto każdy wektor ma długość 1.

[23] Czyli wektory jednostkowej długości.

co z dokładnością do drobnego przeorganizowania współczynników jest stwierdzeniem, że funkcja jest sumą swojego szeregu Fouriera.

Gdybyśmy uparcie trzymali się zdefiniowanej wcześniej normy supremum i oczekiwali zbieżności jednostajnej, czy choćby punktowej, to niestety dla pewnych funkcji ciągłych byłyby problemy[24]. Norma supremum i zbieżność jednostajna świetnie pasują do funkcji ciągłych, gdy kluczowe jest zachowanie ciągłości przy przejściu granicznym, ale w przypadku szeregów Fouriera lepiej sprawdza się zbieżność oparta na normie związanej z iloczynem skalarnym:

$$\|f\|_2 = \sqrt{\langle f, f\rangle} = \sqrt{\int_0^{2\pi} f^2(x)\,dx}\,.$$

Jednak wchodzenie w dalsze detale wykracza poza zakres tego wykładu.

Jeżeli w skończenie wymiarowej przestrzeni wprowadzimy bazę ortonormalną[25] i związane z nią współrzędne, to iloczyn skalarny okazuje się być po prostu sumą iloczynów współrzędnych:

$$\langle v\,, w\rangle = \sum_{k=1}^{n} \langle v, e_k\rangle \cdot \langle w, e_k\rangle\,.$$

W szczególności

$$\langle v\,, v\rangle = \sum_{k=1}^{n} \langle v, e_k\rangle^2.$$

Jeżeli przyjmiemy, że przestrzeń ma nieskończenie wiele prostopadłych wymiarów i zignorujemy trudności techniczne związane z przejściem granicznym, to możemy oczekiwać, że

$$\langle v\,, w\rangle = \sum_{k=1}^{\infty} \langle v, e_k\rangle \cdot \langle w, e_k\rangle$$

oraz

$$\langle v\,, v\rangle = \sum_{k=1}^{\infty} \langle v, e_k\rangle^2.$$

Dla funkcji i związanych z nimi szeregów Fouriera, przy założeniu

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

oraz

$$g(x) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (c_n \cos nx + d_n \sin nx)$$

otrzymujemy[26]:

$$\langle f, g\rangle = \int_0^{2\pi} f(x) \cdot g(x)\, dx = 2\pi \cdot a_0 \cdot c_0 + \pi \cdot \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cdot c_n + b_n \cdot d_n)\,.$$

[24]Jak już wcześniej wspomniałem, szereg Fouriera funkcji ciągłej może być rozbieżny na gęstym zbiorze.

[25]Może być też baza ortogonalna, tylko wtedy trzeba uwzględnić we wzorze długości wektorów bazowych.

[26]Ignorując teorię, która uzasadnia przejścia graniczne.

W szczególności otrzymujemy **równość Parsevala:**

$$\langle f, f\rangle = \int_0^{2\pi} f^2(x)\, dx = 2\pi \cdot a_0^2 + \pi \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n^2 + b_n^2\right) .$$

Na zakończenie zastosujmy równość Parsevala do szeregów Fouriera otrzymanych na poprzednim wykładzie.

Przykład 1: Funkcja f jest zdefiniowana wzorem $f(x)=x$ dla $x\in(-\pi, \pi)$ oraz $f(\pi)=0$.

$$a_0 = a_n = 0, \qquad b_n = \frac{2\cdot(-1)^{n+1}}{n} .$$

Ponieważ

$$\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\, dx = \int_{-\pi}^{\pi} x^2\, dx = 2\cdot \int_0^{\pi} x^2\, dx = \left.\frac{2x^3}{3}\right|_{x=0}^{\pi} = \frac{2\pi^3}{3} ,$$

równość Parsevala przyjmuje postać

$$\frac{2\pi^3}{3} = \pi \cdot \sum_{n=1}^{\infty} b_n^2 = \pi \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2} = 4\pi \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} ,$$

skąd otrzymujemy znaną nam równość

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} .$$

Przykład 2: Funkcja f jest zdefiniowana wzorem $f(x)=|x|$ dla $x\in[-\pi, \pi)$.

$$b_n = 0, \qquad a_0 = \frac{\pi}{2} , \qquad a_n = \begin{cases} 0 & \text{dla } n \text{ parzystych} \\ -4/(\pi\cdot n^2) & \text{dla } n \text{ nieparzystych} \end{cases}$$

Ponieważ podobnie jak w poprzednim przykładzie

$$\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\, dx = \int_{-\pi}^{\pi} x^2\, dx = \frac{2\pi^3}{3} ,$$

równość Parsevala przyjmuje postać

$$\frac{2\pi^3}{3} = 2\pi \cdot a_0^2 + \pi \cdot \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 = \frac{\pi^3}{2} + \pi \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{16}{\pi^2 \cdot (2k+1)^4} = \frac{\pi^3}{2} + \frac{16}{\pi} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^4} ,$$

skąd otrzymujemy

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^4} = \frac{\pi^4}{96} .$$

Postępując podobnie jak w przykładzie 2 z poprzedniego wykładu (korona41, strona 307), można udowodnić, że

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{16}{15} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^4} ,$$

co prowadzi do

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90} .$$