

Dzień 43 (wtorek 19 maja 2020)
Przypomnienie najważniejszych definicji i twierdzeń
związanych z szeregami Fouriera.

Iloczyn skalarny w przestrzeni funkcji¹:

$$\langle f, g \rangle = \int_0^{2\pi} f(x) \cdot g(x) \, dx .$$

Iloczyn skalarny w języku bazy² ortogonalnej sinusów i cosinusów:
 Jeżeli

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

oraz

$$g(x) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (c_n \cos nx + d_n \sin nx) ,$$

to

$$\langle f, g \rangle = \int_0^{2\pi} f(x) \cdot g(x) \, dx = 2\pi \cdot a_0 \cdot c_0 + \pi \cdot \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cdot c_n + b_n \cdot d_n) .$$

Równość Parsevala:

$$\langle f, f \rangle = \int_0^{2\pi} f^2(x) \, dx = 2\pi \cdot a_0^2 + \pi \cdot \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) .$$

Szereg Fouriera funkcji³ f:

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) , \tag{F}$$

gdzie

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \cdot \langle f, 1 \rangle = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_0^{2\pi} f(x) \, dx , \tag{F0}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \cdot \langle f, \cos nx \rangle = \frac{1}{\pi} \cdot \int_0^{2\pi} f(x) \cdot \cos nx \, dx \tag{FA}$$

oraz

$$b_n = \frac{1}{\pi} \cdot \langle f, \sin nx \rangle = \frac{1}{\pi} \cdot \int_0^{2\pi} f(x) \cdot \sin nx \, dx . \tag{FB}$$

Przy założeniach, które są spełnione przez używane przez nas funkcje, szereg Fouriera (F) jest punktowo zbieżny do funkcji f .

¹Nie precyzujemy dokładnie, jak regularne mają być funkcje. Na pewno muszą być okresowe o okresie 2π .

²To nie jest baza w sensie algebry liniowej, bo potrzebujemy przejścia granicznego do wysumowania szeregu.

³Okresowej o okresie 2π , w punktach nieciągłości mającej wartość równą średniej arytmetycznej granic jednostronnych.

Dziś porozwiązujemy sobie trochę zadań...

Odpowiedzi do zadań **446** i **447** pojawią się jutro.

443. Obliczyć współczynniki szeregu Fouriera funkcji $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ okresowej o okresie 2π określonej wzorem

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{dla } x \in [0, \pi/2] \\ 0 & \text{dla } x \in (\pi/2, 2\pi) \end{cases}$$

Doprowadzić wzory na współczynniki szeregu Fouriera do postaci niezawierającej funkcji trygonometrycznych (czyli w ostatecznej postaci nie powinny występować w tych wzorach wyrażenia typu $\sin n\pi$ czy $\cos n\pi$).

Zanim zajrzysz na kolejną stronę, rozwiąż powyższe zadanie, a przynajmniej podejmij próbę rozwiązania, aby wiedzieć, gdzie napotykasz trudności.

Rozwiązanie:

Stosując wzory na współczynniki szeregu Fouriera otrzymujemy:

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi/2} dx = \frac{\pi/2}{2\pi} = \frac{1}{4},$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi/2} \cos nx \, dx = \frac{\sin nx}{n\pi} \Big|_{x=0}^{\pi/2} = \frac{\sin(n\pi/2)}{n\pi} = \begin{cases} 0 & \text{dla } n \equiv 0 \pmod{2} \\ \frac{(-1)^{(n-1)/2}}{n\pi} & \text{dla } n \equiv 1 \pmod{2} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi/2} \sin nx \, dx = -\frac{\cos nx}{n\pi} \Big|_{x=0}^{\pi/2} = \frac{1 - \cos(n\pi/2)}{n\pi} = \\ &= \begin{cases} \frac{1}{n\pi} & \text{dla } n \equiv 1 \pmod{2} \\ \frac{1 - (-1)^{n/2}}{n\pi} & \text{dla } n \equiv 0 \pmod{2} \end{cases} = \quad \text{(dotąd wystarczy)} \\ &= \begin{cases} \frac{1}{n\pi} & \text{dla } n \equiv 1 \pmod{2} \\ 0 & \text{dla } n \equiv 0 \pmod{4} \\ \frac{2}{n\pi} & \text{dla } n \equiv 2 \pmod{4} \end{cases} = \begin{cases} \frac{1}{n\pi} & \text{dla } n \equiv 1 \pmod{2} \\ 0 & \text{dla } n \equiv 0 \pmod{4} \\ \frac{1}{(n/2)\pi} & \text{dla } n \equiv 2 \pmod{4} \end{cases} \end{aligned}$$

444. Niech

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{2^n} \quad \text{oraz} \quad g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{3^n}.$$

Zakładając pełną beztróskę w manipulowaniu szeregami funkcyjnymi, obliczyć wartość całki $\int_0^{2\pi} f(x)g(x) \, dx$.

Zanim zajrzysz na kolejną stronę, rozwiąż powyższe zadanie, a przynajmniej podejmij próbę rozwiązania, aby wiedzieć, gdzie napotkasz trudności.

Rozwiązanie:

Korzystamy z tego, że sinusy o różnych częstotliwościach są prostopadłe, czyli całka z ich iloczynu jest zerem:

$$\int_0^{2\pi} \sin nx \cdot \sin mx \, dx = \begin{cases} \pi & \text{dla } m = n \\ 0 & \text{dla } m \neq n \end{cases}$$

Otrzymujemy

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} f(x)g(x) \, dx &= \int_0^{2\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{2^n} \cdot \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin mx}{3^m} \, dx = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \int_0^{2\pi} \frac{\sin nx}{2^n} \cdot \frac{\sin mx}{3^m} \, dx = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{2\pi} \frac{\sin nx}{2^n} \cdot \frac{\sin nx}{3^n} \, dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{2\pi} \frac{\sin^2 nx}{6^n} \, dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi}{6^n} = \frac{\pi}{5}. \end{aligned}$$

Uwaga: Idea powyższych rachunków jest następująca: iloczyn skalarny dwóch wektorów jest sumą iloczynów odpowiednich współrzędnych – tutaj rolę współrzędnych spełniają współczynniki szeregu trygonometrycznego (z dokładnością do stałego czynnika).

W rozwiązaniu można też powołać się bezpośrednio na postać iloczynu skalarnego w bazie ortogonalnej sinusów i cosinusów.

445. Obliczyć wartość sumy $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+2}$. Wolno skorzystać z gotowych wartości całek:

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} e^{x\sqrt{2}} \, dx &= \frac{e^{2\pi\sqrt{2}} - 1}{\sqrt{2}}, \\ \int_0^{2\pi} e^{2x\sqrt{2}} \, dx &= \frac{e^{4\pi\sqrt{2}} - 1}{2\sqrt{2}}, \\ \int_0^{2\pi} e^{x\sqrt{2}} \cos nx \, dx &= (e^{2\pi\sqrt{2}} - 1) \cdot \frac{\sqrt{2}}{n^2 + 2}, \\ \int_0^{2\pi} e^{x\sqrt{2}} \sin nx \, dx &= (e^{2\pi\sqrt{2}} - 1) \cdot \frac{-n}{n^2 + 2}. \end{aligned}$$

W miarę możliwości rozwiązać zadanie dwoma sposobami i porównać wyniki. Dla czytelności przeprowadzanych rachunków oraz podanej odpowiedzi można użyć oznaczeń:

$$A = e^{2\pi\sqrt{2}} - 1 \quad \text{oraz} \quad B = e^{2\pi\sqrt{2}} + 1.$$

Wskazówka: Wykorzystać szereg Fouriera funkcji $f(x) = e^{x\sqrt{2}}$ dla $x \in (0, 2\pi)$. Powołać się na zbieżność tego szeregu w wybranym punkcie lub wykorzystać równość Parsewala.

Zanim zajrzysz na kolejną stronę, rozwiąż powyższe zadanie, a przynajmniej podejmij próbę rozwiązania, aby wiedzieć, gdzie napotykasz trudności.

Rozwiązanie:

Na wstępie zauważmy, że na mocy podanych równości szereg Fouriera funkcji f okresowej z okresem 2π i określonej na przedziale $[0, 2\pi)$ wzorem

$$f(x) = \begin{cases} e^{x\sqrt{2}} & \text{dla } x \in (0, 2\pi) \\ \frac{e^{2\pi\sqrt{2}}+1}{2} & \text{dla } x = 0 \end{cases}$$

ma współczynniki

$$a_0 = \frac{e^{2\pi\sqrt{2}} - 1}{2\pi\sqrt{2}},$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \cdot (e^{2\pi\sqrt{2}} - 1) \cdot \frac{\sqrt{2}}{n^2 + 2},$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \cdot (e^{2\pi\sqrt{2}} - 1) \cdot \frac{-n}{n^2 + 2},$$

a ponadto jest on punktowo zbieżny do funkcji f , gdyż f ma w punkcie nieciągłości wartość równą średniej arytmetycznej granic jednostronnych.

Sposób I

Porównując wartość funkcji f w punkcie $x = 0$ z sumą jej szeregu Fouriera w tym punkcie otrzymujemy

$$f(0) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n,$$

czyli

$$\frac{e^{2\pi\sqrt{2}}+1}{2} = \frac{e^{2\pi\sqrt{2}}-1}{2\pi\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{2}}{\pi} \cdot (e^{2\pi\sqrt{2}}-1) \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+2}.$$

Stąd otrzymujemy kolejno:

$$\begin{aligned} \frac{e^{2\pi\sqrt{2}}+1}{2} - \frac{e^{2\pi\sqrt{2}}-1}{2\pi\sqrt{2}} &= \frac{\sqrt{2}}{\pi} \cdot (e^{2\pi\sqrt{2}}-1) \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+2}, \\ \frac{\pi\sqrt{2}e^{2\pi\sqrt{2}} + \pi\sqrt{2} - e^{2\pi\sqrt{2}} + 1}{2\pi\sqrt{2}} &= \frac{\sqrt{2}}{\pi} \cdot (e^{2\pi\sqrt{2}}-1) \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+2}, \\ \frac{\pi\sqrt{2}e^{2\pi\sqrt{2}} + \pi\sqrt{2} - e^{2\pi\sqrt{2}} + 1}{4 \cdot (e^{2\pi\sqrt{2}}-1)} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+2}, \\ \frac{\pi\sqrt{2}B - A}{4A} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+2}. \end{aligned}$$

Sposób II

Korzystając z równości Parsevala:

$$\int_0^{2\pi} f(x)^2 dx = 2\pi a_0^2 + \pi \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2)$$

otrzymujemy

$$\frac{e^{4\pi\sqrt{2}} - 1}{2\sqrt{2}} = \frac{(e^{2\pi\sqrt{2}} - 1)^2}{4\pi} + \frac{1}{\pi} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \left(\left((e^{2\pi\sqrt{2}} - 1) \cdot \frac{\sqrt{2}}{n^2 + 2} \right)^2 + \left((e^{2\pi\sqrt{2}} - 1) \cdot \frac{-n}{n^2 + 2} \right)^2 \right),$$

co przepisujemy kolejno jako:

$$\frac{(e^{2\pi\sqrt{2}} - 1) \cdot (e^{2\pi\sqrt{2}} + 1)}{2\sqrt{2}} = \frac{(e^{2\pi\sqrt{2}} - 1)^2}{4\pi} + \frac{1}{\pi} \cdot (e^{2\pi\sqrt{2}} - 1)^2 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 2},$$

$$\frac{e^{2\pi\sqrt{2}} + 1}{2\sqrt{2}} = \frac{e^{2\pi\sqrt{2}} - 1}{4\pi} + \frac{1}{\pi} \cdot (e^{2\pi\sqrt{2}} - 1) \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 2},$$

$$\frac{e^{2\pi\sqrt{2}} + 1}{2\sqrt{2}} - \frac{e^{2\pi\sqrt{2}} - 1}{4\pi} = \frac{1}{\pi} \cdot (e^{2\pi\sqrt{2}} - 1) \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 2},$$

$$\frac{\pi\sqrt{2}e^{2\pi\sqrt{2}} + \pi\sqrt{2} - e^{2\pi\sqrt{2}} + 1}{4\pi} = \frac{1}{\pi} \cdot (e^{2\pi\sqrt{2}} - 1) \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 2},$$

$$\frac{\pi\sqrt{2}e^{2\pi\sqrt{2}} + \pi\sqrt{2} - e^{2\pi\sqrt{2}} + 1}{4 \cdot (e^{2\pi\sqrt{2}} - 1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 2},$$

$$\frac{\pi\sqrt{2}B - A}{4A} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 2}.$$

446. W każdym z zadań **446.1-446.10** podaj w postaci uproszczonej wartość całki oznaczonej.

$$A(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{4^n}, \quad B(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{5^n},$$

$$C(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{10^n}, \quad D(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 2nx}{10^n}.$$

446.1. $\int_0^{2\pi} A(x)^2 dx = \dots$	446.2. $\int_0^{2\pi} B(x)^2 dx = \dots$
446.3. $\int_0^{2\pi} C(x)^2 dx = \dots$	446.4. $\int_0^{2\pi} D(x)^2 dx = \dots$
446.5. $\int_0^{2\pi} A(x)B(x) dx = \dots$	446.6. $\int_0^{2\pi} A(x)C(x) dx = \dots$
446.7. $\int_0^{2\pi} A(x)D(x) dx = \dots$	446.8. $\int_0^{2\pi} B(x)C(x) dx = \dots$
446.9. $\int_0^{2\pi} B(x)D(x) dx = \dots$	446.10. $\int_0^{2\pi} C(x)D(x) dx = \dots$

447. W każdym z zadań **447.1-447.21** podaj w postaci uproszczonej wartość całki (jako liczbę wymierną lub jako iloczyn liczby wymiernej i liczby π).

$A(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{2^n},$	$B(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2nx}{3^n},$	$C(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2n+1)x}{3^n},$
$D(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 3nx}{10^n},$	$E(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(3n+1)x}{10^n},$	$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(3n+2)x}{10^n}.$
447.1. $\int_0^{2\pi} A(x)^2 dx = \dots$	447.2. $\int_0^{2\pi} B(x)^2 dx = \dots$	
447.3. $\int_0^{2\pi} C(x)^2 dx = \dots$	447.4. $\int_0^{2\pi} D(x)^2 dx = \dots$	
447.5. $\int_0^{2\pi} E(x)^2 dx = \dots$	447.6. $\int_0^{2\pi} F(x)^2 dx = \dots$	
447.7. $\int_0^{2\pi} A(x)B(x) dx = \dots$	447.8. $\int_0^{2\pi} A(x)C(x) dx = \dots$	
447.9. $\int_0^{2\pi} A(x)D(x) dx = \dots$	447.10. $\int_0^{2\pi} A(x)E(x) dx = \dots$	
447.11. $\int_0^{2\pi} A(x)F(x) dx = \dots$	447.12. $\int_0^{2\pi} B(x)C(x) dx = \dots$	
447.13. $\int_0^{2\pi} B(x)D(x) dx = \dots$	447.14. $\int_0^{2\pi} B(x)E(x) dx = \dots$	
447.15. $\int_0^{2\pi} B(x)F(x) dx = \dots$	447.16. $\int_0^{2\pi} C(x)D(x) dx = \dots$	
447.17. $\int_0^{2\pi} C(x)E(x) dx = \dots$	447.18. $\int_0^{2\pi} C(x)F(x) dx = \dots$	
447.19. $\int_0^{2\pi} D(x)E(x) dx = \dots$	447.20. $\int_0^{2\pi} D(x)F(x) dx = \dots$	
447.21. $\int_0^{2\pi} E(x)F(x) dx = \dots$		