

Dzień 44 (środa 20 maja 2020)

Zaczynamy od odpowiedzi do wczorajszych zadań.

446. W każdym z zadań **446.1-446.10** podaj w postaci uproszczonej wartość całki oznaczonej.

$$\begin{aligned} A(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{4^n}, & B(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{5^n}, \\ C(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{10^n}, & D(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 2nx}{10^n}. \end{aligned}$$

$$\mathbf{446.1.} \quad \int_0^{2\pi} A(x)^2 dx = \frac{\pi}{\mathbf{15}}$$

$$\mathbf{446.2.} \quad \int_0^{2\pi} B(x)^2 dx = \frac{\pi}{\mathbf{24}}$$

$$\mathbf{446.3.} \quad \int_0^{2\pi} C(x)^2 dx = \frac{\pi}{\mathbf{99}}$$

$$\mathbf{446.4.} \quad \int_0^{2\pi} D(x)^2 dx = \frac{\pi}{\mathbf{99}}$$

$$\mathbf{446.5.} \quad \int_0^{2\pi} A(x)B(x) dx = \frac{\pi}{\mathbf{19}}$$

$$\mathbf{446.6.} \quad \int_0^{2\pi} A(x)C(x) dx = \frac{\pi}{\mathbf{39}}$$

$$\mathbf{446.7.} \quad \int_0^{2\pi} A(x)D(x) dx = \frac{\pi}{\mathbf{159}}$$

$$\mathbf{446.8.} \quad \int_0^{2\pi} B(x)C(x) dx = \frac{\pi}{\mathbf{49}}$$

$$\mathbf{446.9.} \quad \int_0^{2\pi} B(x)D(x) dx = \frac{\pi}{\mathbf{249}}$$

$$\mathbf{446.10.} \quad \int_0^{2\pi} C(x)D(x) dx = \frac{\pi}{\mathbf{999}}$$

447. W każdym z zadań **447.1-447.21** podaj w postaci uproszczonej wartość całki (jako liczbę wymierną lub jako iloczyn liczby wymiernej i liczby π).

$$A(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{2^n}, \quad B(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2nx}{3^n}, \quad C(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2n+1)x}{3^n},$$

$$D(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 3nx}{10^n}, \quad E(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(3n+1)x}{10^n}, \quad F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(3n+2)x}{10^n}.$$

$$\mathbf{447.1.} \quad \int_0^{2\pi} A(x)^2 dx = \frac{\pi}{\mathbf{3}}$$

$$\mathbf{447.2.} \quad \int_0^{2\pi} B(x)^2 dx = \frac{\pi}{\mathbf{8}}$$

$$\mathbf{447.3.} \quad \int_0^{2\pi} C(x)^2 dx = \frac{\pi}{\mathbf{8}}$$

$$\mathbf{447.4.} \quad \int_0^{2\pi} D(x)^2 dx = \frac{\pi}{\mathbf{99}}$$

$$\mathbf{447.5.} \quad \int_0^{2\pi} E(x)^2 dx = \frac{\pi}{\mathbf{99}}$$

$$\mathbf{447.6.} \quad \int_0^{2\pi} F(x)^2 dx = \frac{\pi}{\mathbf{99}}$$

$$\mathbf{447.7.} \quad \int_0^{2\pi} A(x)B(x) dx = \frac{\pi}{\mathbf{11}}$$

$$\mathbf{447.8.} \quad \int_0^{2\pi} A(x)C(x) dx = \frac{\pi}{\mathbf{22}}$$

$$\mathbf{447.9.} \quad \int_0^{2\pi} A(x)D(x) dx = \frac{\pi}{\mathbf{79}}$$

$$\mathbf{447.10.} \quad \int_0^{2\pi} A(x)E(x) dx = \frac{\pi}{\mathbf{158}}$$

$$\mathbf{447.11.} \quad \int_0^{2\pi} A(x)F(x) dx = \frac{\pi}{\mathbf{316}}$$

$$\mathbf{447.12.} \quad \int_0^{2\pi} B(x)C(x) dx = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{447.13.} \quad \int_0^{2\pi} B(x)D(x) dx = \frac{\pi}{\mathbf{2699}}$$

$$\mathbf{447.14.} \quad \int_0^{2\pi} B(x)E(x) dx = \frac{\mathbf{30}\pi}{\mathbf{2699}}$$

$$\mathbf{447.15.} \quad \int_0^{2\pi} B(x)F(x) dx = \frac{\pi}{\mathbf{8097}}$$

$$\mathbf{447.16.} \quad \int_0^{2\pi} C(x)D(x) dx = \frac{\mathbf{90}\pi}{\mathbf{2699}}$$

$$\mathbf{447.17.} \quad \int_0^{2\pi} C(x)E(x) dx = \frac{\pi}{\mathbf{2699}}$$

$$\mathbf{447.18.} \quad \int_0^{2\pi} C(x)F(x) dx = \frac{\mathbf{30}\pi}{\mathbf{2699}}$$

$$\mathbf{447.19.} \quad \int_0^{2\pi} D(x)E(x) dx = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{447.20.} \quad \int_0^{2\pi} D(x)F(x) dx = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{447.21.} \quad \int_0^{2\pi} E(x)F(x) dx = \mathbf{0}$$

Ponieważ jutro zajmiemy się innym tematem, podsumujemy podstawowe fakty dotyczące szeregów potęgowych i trygonometrycznych.

Szereg potęgowy	Własność	Szereg trygonometryczny
$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$	Wzór	$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$
Wielomianem	Czym jest suma częściowa?	Wielomianem trygonometrycznym
Przedział	Obszar zbieżności	Może być sieczka
C^∞	Regularność sumy szeregu	Może być nieciągła
$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$	Odzyskiwanie współczynników na podstawie funkcji f będącej sumą szeregu	$a_0 = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_0^{2\pi} f(x) dx$ $a_n = \frac{1}{\pi} \cdot \int_0^{2\pi} f(x) \cdot \cos nx dx$ $b_n = \frac{1}{\pi} \cdot \int_0^{2\pi} f(x) \cdot \sin nx dx$
Taylora	Nazwa odzyskanego szeregu	Fouriera
Nawet dla $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ może być rozbieżny	Przy jakich warunkach na f powyższy szereg jest zbieżny?	Przy $f \in C^1(\mathbb{R})$ zbieżny, a także przy niektórych słabszych warunkach (nawet bez ciągłości f)
Niekoniecznie	Jeśli zbieżny jednostajnie, a f jest ciągła, to czy jest zbieżny do f ?	Tak
$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{2n}$	Funkcja parzysta	$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$
$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{2n+1}$	Funkcja nieparzysta	$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$
$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$	Warianty definicji	$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos (nx + \varphi_n)$

Widać wyraźnie, że szeregi potęgowe i trygonometryczne mają zupełnie inne własności. Jednak wkrótce zobaczymy, że są one różnymi obliczami tego samego obiektu...