

Dzień 45 (czwartek 21 maja 2020)**Ciągi i szeregi liczbowe o wyrazach zespolonych**

Jak już nietrudno się domyślić, ciągiem liczbowym o wyrazach zespolonych¹ będziemy nazywać ciąg $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$, którego wyrazy z_n są liczbami zespolonymi. Zespolone szeregi liczbowe to te same obiekty, co ciągi zespolone, tylko inaczej podane².

Jak wiemy z doświadczenia, głównym pojęciem analizy związanym z wszelkiego rodzaju ciągami jest pojęcie zbieżności i granicy. Przypomnijmy więc definicję granicy ciągu liczbowego (o wyrazach rzeczywistych). Ciąg liczbowy (a_n) jest zbieżny do granicy g , jeżeli

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \forall n \geq N |a_n - g| < \varepsilon.$$

Intuicyjnie: dalekie wyraz ciągu mają być bliskie granicy. Za mechanizm uzależnienia dalekiego posunięcia się w ciągu stosownie do małości epsilon odpowiada układ kwantyfikatorów. Kluczowa jest możliwość określania bliskości dwóch liczb rzeczywistych³ dzięki pomiarowi zwykłej geometrycznej odległości między liczbami na osi liczbowej. Odległością liczb x i y jest po prostu moduł ich różnicy: $|x - y|$. Skoro mamy miarę tego, jak bardzo dwie liczby się różnią, to możemy tę miarę wkomponować w definicję granicy ciągu liczbowego.

Będziemy mogli przenieść tę definicję na grunt liczb zespolonych, jeśli zgodzimy się co do tego, jak mierzyć odległości między liczbami zespolonymi. Ale tu chyba nie ma żadnego sporu, gdyż ze względu na interpretowanie liczb zespolonych jako punktów płaszczyzny możemy po prostu przyjąć standardową odległość euklidesową, zgodnie z którą odległość liczb zespolonych jest modułem ich różnicy.

W konsekwencji przyjmujemy, że ciąg (z_n) jest zbieżny do granicy⁴ g , jeżeli

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \forall n \geq N |z_n - g| < \varepsilon.$$

Widzimy, że definicja ta od definicji granicy ciągu rzeczywistego różni się tylko użyciem literki z innego końca alfabetu dla oznaczenia wyrazów ciągu. Nic dziwnego, skoro wartość bezwzględną liczby zespolonej oznaczamy tym samym symbolem, co w przypadku rzeczywistym, a sformułowanie *odległość jest modułem różnicy* nie zawiera bezpośredniego odniesienia do rodzaju liczb o jakich mówimy.

¹Lub zespolonym ciągiem liczbowym.

²Jak zwykle szereg utożsamiamy z ciągiem jego sum częściowych. Terminologia się przenosi poza dwoma elementami:

- Co innego nazywamy wyrazem — w szeregu wyrazami nazywamy składniki, które dodawane tworzą wyrazy ciągu sum częściowych.
- Inaczej zapisujemy granicę — w ciągu trzeba napisać "lim", w szeregu po prostu piszemy sumę nieskończenie wielu składników.

³W tym wypadku a_n oraz g .

⁴Oczywiście g jest liczbą zespoloną.

Nietrudno zgadnąć, że na podstawie tej definicji można przepisać większość torii zbieżności ciągów z przypadku rzeczywistego, a w szczególności:

- suma, różnica, iloczyn, iloraz⁵ ciągów zbieżnych jest ciągiem zbieżnym i granica sumy, różnicy, iloczynu, ilorazu ciągów jest odpowiednio sumą, różnicą, iloczynem, ilorazem granic,
- zmiana skończenie wielu wyrazów nie wpływa na zbieżność i granicę,
- $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\lim_{n \rightarrow \infty} |z_n| = 0$,
- jeżeli $|z| < 1$, to $\lim_{n \rightarrow \infty} z^n = 0$,
- jeżeli $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = g$, to $\lim_{n \rightarrow \infty} |z_n| = |g|$.

Okazuje się też, że pojęcie granicy ciągów zespolonych pozornie się trywializuje w obliczu następującego twierdzenia:

Niech

$$z_n = x_n + y_n i,$$

gdzie x_n, y_n są liczbami rzeczywistymi. Wówczas ciąg zespolony (z_n) jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy **obydwa**⁶ ciągi rzeczywiste $(x_n), (y_n)$ są zbieżne. W takim wypadku

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n + i \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} y_n.$$

Innymi słowy, zbieżność ciągu zespolonego sprowadza się do zbieżności dwóch ciągów rzeczywistych: ciągu części rzeczywistych oraz ciągu części urojonych.

Ktoś może powiedzieć: To jak tak, to po co sobie zawracać głowę z całą tą teorią, skoro ciąg zespolony to tak naprawdę para ciągów rzeczywistych? Po co badać zbieżność ciągu zespolonego, skoro wyjdzie na to samo jak zbadamy dwa ciągi rzeczywiste? Okazuje się, że nie do końca tak jest. Struktura liczb zespolonych może być czasami bardzo pomocna, co najlepiej widać na następującym przykładzie:

Przykład: Obliczyć granicę

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5 + \left(\frac{2+2i}{3}\right)^n + \left(\frac{8+4i}{9}\right)^{n^2}}{3 + \left(\frac{12+12i}{17}\right)^{n^n} + \left(\frac{18+6i}{19}\right)^{n^{n^n}}}.$$

Ktoś chętny, aby rozłożyć wyrażenie pod znakiem granicy na część rzeczywistą i część urojoną? Nie sądzę. Natomiast wystarczy zauważyć, że wszystkie cztery liczby zespolone podnoszone do potęgi mają moduł mniejszy od 1, a więc odpowiednie potęgi dążą do zera. W konsekwencji granica jest równa $5/3$.

⁵W przypadku ilorazu musimy zadbać o to, aby do mianownika nie dostało się zero. W szczególności granica mianownika musi być niezerowa.

⁶Jeśli jeden z ciągów $(x_n), (y_n)$ jest rozbieżny, to ciąg (z_n) jest rozbieżny niezależnie od zachowania drugiego z tych ciągów.

Jeśli chodzi o zespolone szeregi liczbowe, to z teorii szeregów rzeczywistych przenoszą się następujące kryteria zbieżności:

• **Warunek konieczny zbieżności:** Jeżeli $z_n \not\rightarrow 0$, czyli $|z_n| \not\rightarrow 0$, to szereg $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ jest rozbieżny.

• **Zmiana wyrazów:** Zmiana lub pominięcie skończenie wielu wyrazów nie wpływa na zbieżność szeregu, ale może wpływać na wartość jego sumy.

• **Dodawanie/odejmowanie szeregów:** Jeżeli szeregi $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ oraz $\sum_{n=1}^{\infty} w_n$ są zbieżne, to zbieżne są szeregi $\sum_{n=1}^{\infty} (z_n \pm w_n)$ i przy tym

$$\sum_{n=1}^{\infty} (z_n \pm w_n) = \sum_{n=1}^{\infty} z_n \pm \sum_{n=1}^{\infty} w_n.$$

• **Mnożenie przez stałą:** Jeżeli c jest liczbą zespoloną różną od zera, to szereg $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy zbieżny jest szereg $\sum_{n=1}^{\infty} cz_n$. Jeśli te szeregi są zbieżne, to

$$\sum_{n=1}^{\infty} cz_n = c \cdot \sum_{n=1}^{\infty} z_n.$$

• **Szereg geometryczny:** Jeżeli c jest liczbą zespoloną różną od zera, to szereg $\sum_{n=1}^{\infty} cz^n$ jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy $|z| < 1$. W takim przypadku

$$\sum_{n=1}^{\infty} cz^n = \frac{cz}{1-z}.$$

• **Zbieżność bezwzględna:** Jeżeli $\sum_{n=1}^{\infty} |z_n| < \infty$, to szereg $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ jest zbieżny i wówczas

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} z_n \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |z_n|.$$

• **Kryterium d'Alemberta:** Jeżeli $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{z_{n+1}}{z_n} \right| = g \in [0, \infty]$, to:

W przypadku $g < 1$ szereg $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ jest zbieżny oraz $z_n \rightarrow 0$.

W przypadku $g > 1$ szereg $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ jest rozbieżny oraz $|z_n| \rightarrow \infty$.

• **Kryterium Cauchy'ego:** Jeżeli $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|z_n|} = g \in [0, \infty]$, to konkluzja jak wyżej.

Przytoczymy też kryterium nie mające odpowiednika w teorii szeregów rzeczywistych:

• **Rozkład na części rzeczywistą i urojoną:** Szereg $\sum_{n=1}^{\infty} (x_n + y_n i)$, gdzie x_n oraz y_n są rzeczywiste, jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy **obydwa** szeregi $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ oraz⁷ $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ są zbieżne. Jak się można spodziewać, w przypadku szeregów zbieżnych zachodzi równość

$$\sum_{n=1}^{\infty} (x_n + y_n i) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n + i \cdot \sum_{n=1}^{\infty} y_n.$$

Jest jeszcze jedno ważne kryterium. Ale powolutku. Z teorii liczbowych szeregów rzeczywistych znamy kryterium Leibniza o szeregach naprzemiennych:

Jeżeli $a_n \searrow 0$, to szereg $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ jest zbieżny.

Na pierwszy rzut oka wydaje się, że w tym kryterium nie ma miejsca na liczby zespolone. Jednak okazuje się, że dopiero w liczbach zespolonych widać głębię tego kryterium. Trzeba sobie tylko wyjaśnić, czym jest liczba -1 . Otóż jest to liczba o module 1 różna od 1.

Mamy więc:

• **Uogólnienie kryterium Leibniza o szeregach naprzemiennych:**

Niech w będzie taką liczbą zespoloną, że $|w| = 1$ oraz $w \neq 1$. Niech (a_n) będzie nierosnącym ciągiem liczb rzeczywistych dodatnich zbieżnym do zera. Wówczas szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n w^n$$

jest zbieżny.

Na zakończenie dzisiejszego wykładu dwa zadania.

455. Rozstrzygnąć zbieżność szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+i}{n^2+i}.$$

Zanim zajrzysz na kolejną stronę, rozwiąż powyższe zadanie, a przynajmniej podejmij próbę rozwiązania, aby wiedzieć, gdzie napotykasz trudności.

⁷Niestety, w kontekście liczb zespolonych trzeba bardzo uważać z używaniem spójnika "i", zwłaszcza w pobliżu wzorów, i zamiast niego trzeba używać dłuższego i mniej poręcznego "oraz". Aby choć trochę ukoić tęsknotę za tym spójnikiem, tak spreparowałem temat dzisiejszego wykładu na pierwszej stronie, aby móc napisać:

Odstępy między Ciągi i i i i i szeregi nie są równe.

Rozwiązanie:

Rozdzielamy szereg na część rzeczywistą i urojoną:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+i}{n^2+i} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+i) \cdot (n^2-i)}{n^4+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3+1+(n^2-n) \cdot i}{n^4+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3+1}{n^4+1} + i \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2-n}{n^4+1}.$$

Korzystając z kryterium porównawczego dowodzimy rozbieżności szeregu części rzeczywistych:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3+1}{n^4+1} \geq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3+0}{n^4+n^4} = \frac{1}{2} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty.$$

Odpowiedź: Podany szereg jest rozbieżny.

456. Rozstrzygnąć zbieżność szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+i}{n^3+i}.$$

Zanim zajrzysz na kolejną stronę, rozwiąż powyższe zadanie, a przynajmniej podejmij próbę rozwiązania, aby wiedzieć, gdzie napotkasz trudności.

Rozwiązanie:

Sposób I:

Rozdzielamy szereg na część rzeczywistą i urojoną:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+i}{n^3+i} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+i) \cdot (n^3-i)}{n^6+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^4+1+(n^3-n) \cdot i}{n^6+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^4+1}{n^6+1} + i \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3-n}{n^6+1}.$$

Korzystając z kryterium porównawczego dowodzimy zbieżności obu składników⁸:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^4+1}{n^6+1} &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^4+n^4}{n^6+0} = 2 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty, \\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3-n}{n^6+1} &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3-0}{n^6+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{n^6+1} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{n^6+0} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} < \infty. \end{aligned}$$

Odpowiedź: Podany szereg jest zbieżny.

Sposób II:

Zastosujemy kryterium zbieżności bezwzględnej oraz kryterium porównawcze:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{n+i}{n^3+i} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n^2+1}}{\sqrt{n^6+1}} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n^2+3n^2}}{\sqrt{n^6+0}} = 2 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty.$$

Odpowiedź: Podany szereg jest zbieżny.

⁸Zauważmy, że w drugim składniku pomimo znaku "−" wyrazy są nieujemne.