

Dzień 46 (piątek 22 maja 2020)**Ciągi i szeregi liczbowe o wyrazach zespolonych (c.d.)**

457. Obliczyć sumę szeregu zespolonego

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2^n}.$$

Dla których z ten szereg jest zbieżny?

Wykorzystać otrzymany wynik do obliczenia sumy szeregu

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos nx}{2^n}.$$

Doprowadzić wynik do postaci

$$\frac{a + b \cos x}{c + d \cos x},$$

gdzie a, b, c, d są liczbami całkowitymi.

Zanim zajrzysz na kolejną stronę, rozwiąż powyższe zadanie, a przynajmniej podejmij próbę rozwiązania, aby wiedzieć, gdzie napotykasz trudności.

Rozwiązanie:

Dany w zadaniu szereg jest szeregiem geometrycznym o pierwszym wyrazie $a_1 = 1$ i ilorazie $q = z/2$, skąd wynika, że jego suma jest równa

$$\frac{a_1}{1-q} = \frac{1}{1-\frac{z}{2}} = \frac{2}{2-z},$$

o ile $|z/2| < 1$, czyli $|z| < 2$, bo szereg geometryczny o ilorazie q jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy $|q| < 1$.

Przyjmując $z = \cos x + i \sin x$, co daje

$$z^n = \cos nx + i \sin nx,$$

otrzymujemy

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos nx}{2^n} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\operatorname{Re} z^n}{2^n} = \operatorname{Re} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2^n} = \operatorname{Re} \frac{2}{2-z} = \\ &= \operatorname{Re} \frac{2}{2-\cos x - i \sin x} = \operatorname{Re} \frac{2 \cdot (2-\cos x + i \sin x)}{(2-\cos x)^2 + \sin^2 x} = \frac{2 \cdot (2-\cos x)}{4-4\cos x + \cos^2 x + \sin^2 x} = \frac{4-2\cos x}{5-4\cos x}. \end{aligned}$$

458. Obliczyć sumę szeregu

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos nx}{3^n}$$

sprowadzając wynik do postaci

$$\frac{a+b \cos x}{c+d \cos x},$$

gdzie a, b, c, d są liczbami całkowitymi.

Zanim zajrzysz na kolejną stronę, rozwiąż powyższe zadanie, a przynajmniej podejmij próbę rozwiązania, aby wiedzieć, gdzie napotykasz trudności.

Rozwiązanie:

Przyjmijmy

$$z = \cos x + i \sin x.$$

Wówczas dla dowolnej liczby całkowitej n zachodzi równość

$$z^n = \cos nx + i \sin nx$$

i w konsekwencji

$$\cos nx = \operatorname{Re} z^n.$$

Przekształcamy dany w zadaniu szereg, korzystając po drodze ze wzoru na sumę szeregu geometrycznego:

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos nx}{3^n} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\operatorname{Re} z^n}{3^n} = \operatorname{Re} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{3^n} = \operatorname{Re} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{3}\right)^n = \operatorname{Re} \frac{1}{1 - \frac{z}{3}} = \operatorname{Re} \frac{3}{3 - z} = \\ &= \operatorname{Re} \frac{3}{3 - \cos x - i \sin x} = \operatorname{Re} \frac{3 \cdot (3 - \cos x + i \sin x)}{(3 - \cos x)^2 + \sin^2 x} = \frac{3 \cdot (3 - \cos x)}{9 - 6 \cos x + \cos^2 x + \sin^2 x} = \\ &= \frac{9 - 3 \cos x}{10 - 6 \cos x}. \end{aligned}$$

Odpowiedź: Suma szeregu danego w treści zadania jest równa $\frac{9 - 3 \cos x}{10 - 6 \cos x}$.

Zespolone szeregi potęgowe

Zespolonym szeregiem potęgowym nazywamy szereg postaci

$$\sum_{n=0}^{\infty} z_n z^n,$$

gdzie z_n są współczynnikami zespolonymi¹, natomiast z przebiega liczby zespolone.

Na razie traktujemy taki szereg jak zespolony szereg liczbowy z parametrem zespolonym z . Pytanie, jakie będziemy zadawać, to pytanie o obszar zbieżności takiego szeregu, czyli problem wyznaczenia zbioru tych liczb zespolonych z , dla których szereg jest zbieżny. Więcej opowiem o tym w następnym tygodniu, a na razie rozwiążcie² kilka zadań na wyznaczanie obszaru³ zbieżności.

¹Jednak często są to liczby rzeczywiste.

²Jeśli nie wiecie, jak się zabierać za takie zadania, potraktujcie pierwsze z nich jako przykład i w miarę szybko obejrzyjcie rozwiązanie.

³Który to obszar, jak się przekonamy, jest kołem o środku w zerze. Ale o tym dokładniej w następnym tygodniu.

Ogólne wskazówki są takie:

1° Najpierw stosujemy kryterium d'Alemberta (ewentualnie Cauchy'ego), aby wyznaczyć promień koła, w którym jest zbieżny szereg⁴. Ten krok niewiele się różni od analogicznej procedury w przypadku rzeczywistych szeregów potęgowych.

2° Następnie rozstrzygamy⁵, w których punktach brzegu koła zbieżności szereg jest zbieżny. Do dyspozycji⁶ mamy następujące trzy kryteria:

• **Warunek konieczny zbieżności**⁷: Jeżeli $w_n \not\rightarrow 0$, czyli $|w_n| \not\rightarrow 0$, to szereg $\sum_{n=1}^{\infty} w_n$ jest rozbieżny.

• **Zbieżność bezwzględna**: Jeżeli $\sum_{n=1}^{\infty} |w_n| < \infty$, to szereg $\sum_{n=1}^{\infty} w_n$ jest zbieżny.

• **Uogólnienie kryterium Leibniza o szeregach naprzemiennych**:

Niech w będzie taką liczbą zespoloną, że $|w| = 1$ oraz $w \neq 1$. Niech (a_n) będzie nierosnącym ciągiem liczb rzeczywistych dodatnich zbieżnym do zera. Wówczas szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n w^n$$

jest zbieżny.

459. Wyznaczyć obszar zbieżności zespolonego szeregu potęgowego

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{3n}}{(-8)^n \cdot n}.$$

Zanim zajrzysz na kolejną stronę, rozwiąż powyższe zadanie, a przynajmniej podejmij próbę rozwiązania, aby wiedzieć, gdzie napotykasz trudności.

⁴Czyli promień zbieżności.

⁵O ile nie rozstrzygnęliśmy tego w kroku 1°.

⁶Inne kryteria wydają się tu mało użyteczne.

⁷Zmieniłem literkę z na w , aby nie używać z_n , które nieco wyżej są współczynnikami szeregu zespolonego.

Rozwiązanie:

Stosując kryterium Cauchy'ego (można też zastosować kryterium d'Alemberta) otrzymujemy

$$\sqrt[n]{\left| \frac{z^{3n}}{(-8)^n \cdot n} \right|} = \frac{|z|^3}{8 \cdot \sqrt[n]{n}} \rightarrow \frac{|z|^3}{8}.$$

Jeżeli $|z|^3/8 < 1$, czyli $|z| < 2$, to dany szereg potęgowy jest zbieżny. Jeśli zaś $|z|^3/8 > 1$, czyli $|z| > 2$, to jest on rozbieżny.

Wobec tego promień zbieżności szeregu jest równy 2 i pozostaje zbadać zbieżność na okręgu ograniczającym koło zbieżności.

Niech więc $|z| = 2$. Wówczas dany szereg potęgowy przyjmuje postać

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-z^3/8)^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{w^n}{n},$$

gdzie $w = -z^3/8$ jest liczbą zespoloną o module 1.

Jeżeli $w \neq 1$, to powyższy szereg jest zbieżny zgodnie z uogólnieniem kryterium Leibniza o szeregach naprzemiennych.

Natomiast dla $w = 1$ otrzymujemy szereg harmoniczny, a więc rozbieżny.

Pozostaje rozwiązać równanie $-z^3/8 = 1$, czyli $z^3 = -8$. Jednym z rozwiązań jest $z = -2$, a pozostałe dwa rozwiązania leżą na okręgu o środku w zerze i promieniu 2 w równych odległościach katowych — mają argumenty $\pm\pi/3$.

Odpowiedź: Podany szereg jest zbieżny w kole o środku w zerze i promieniu 2 wraz z brzegiem oprócz trzech punktów: -2 oraz $1 \pm \sqrt{3}i$.

460. Wyznaczyć obszar zbieżności zespolonego szeregu potęgowego

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{8n}}{16^n \cdot n}.$$

Podać w postaci kartezjańskiej liczby zespolone użyte do opisanie obszaru zbieżności.

Zanim zajrzysz na kolejną stronę, rozwiąż powyższe zadanie, a przynajmniej podejmij próbę rozwiązania, aby wiedzieć, gdzie napotykasz trudności.

Rozwiązanie:

Stosując kryterium Cauchy'ego (można też zastosować kryterium d'Alemberta) otrzymujemy

$$\sqrt[n]{\left|\frac{z^{8n}}{16^n \cdot n}\right|} = \frac{|z|^8}{16 \cdot \sqrt[n]{n}} \rightarrow \frac{|z|^8}{16}.$$

Jeżeli $|z|^8/16 < 1$, czyli $|z| < \sqrt{2}$, to dany szereg potęgowy jest zbieżny.

Jeśli zaś $|z|^8/16 > 1$, czyli $|z| > \sqrt{2}$, to jest on rozbieżny.

Wobec tego promień zbieżności szeregu jest równy $\sqrt{2}$ i pozostaje zbadać zbieżność na okręgu ograniczającym koło zbieżności.

Niech więc $|z| = \sqrt{2}$. Wówczas dany szereg potęgowy przyjmuje postać

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{8n}}{16^n \cdot n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{w^n}{n},$$

gdzie $w = z^8/16$ jest liczbą zespoloną o module 1.

Jeżeli $w \neq 1$, to powyższy szereg jest zbieżny zgodnie z uogólnieniem kryterium Leibniza o szeregach naprzemiennych.

Natomiast dla $w = 1$ otrzymujemy szereg harmoniczny, a więc rozbieżny.

Pozostaje rozwiązać równanie $z^8/16 = 1$, czyli $z^8 = 16$.

Jednym z rozwiązań jest $z = \sqrt{2}$, a pozostałe rozwiązania leżą na okręgu o środku w zerze i promieniu $\sqrt{2}$ w równych odległościach kątowych — mają argumenty $k\pi/4$ przy $k = 1, 2, \dots, 7$.

Odpowiedź: Podany szereg jest zbieżny w kole o środku w zerze i promieniu $\sqrt{2}$ wraz z brzegiem oprócz ośmiu punktów: $\pm\sqrt{2}$, $\pm i\sqrt{2}$ oraz $\pm 1 \pm 2i$.

461. Wyznaczyć **promień**⁸ zbieżności zespolonego szeregu potęgowego

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{n^2} \cdot z^{n^2}}{(n!)^n}. \quad (1)$$

Zanim zajrzysz na kolejną stronę, rozwiąż powyższe zadanie, a przynajmniej podejmij próbę rozwiązania, aby wiedzieć, gdzie napotkasz trudności.

⁸To znaczy, że nie trzeba rozstrzygać, co się dzieje na brzegu koła zbieżności.

Rozwiązanie:

Stosujemy kryterium Cauchy'ego do szeregu (1) traktowanego jako zespolony szereg liczbowy z parametrem z .

Otrzymujemy

$$\sqrt[n]{\left| \frac{n^{n^2} \cdot z^{n^2}}{(n!)^n} \right|} = \left| \frac{n^n \cdot z^n}{n!} \right| = \frac{n^n \cdot |z|^n}{n!} = b_n.$$

Następnie stosujemy kryterium d'Alemberta do rzeczywistego ciągu liczbowego (b_n) .

Otrzymujemy

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{(n+1)^{n+1} \cdot |z|^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{n^n \cdot |z|^n} = \frac{(n+1) \cdot \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \cdot |z|}{(n+1)} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \cdot |z| \rightarrow e \cdot |z|$$

przy $n \rightarrow \infty$.

Tak więc zastosowanie kryterium d'Alemberta prowadzi do granicy ilorazów kolejnych wyrazów ciągu (b_n) równej $e \cdot |z|$.

Jeżeli $e \cdot |z| < 1$, czyli $|z| < 1/e$, to na mocy kryterium d'Alemberta $b_n \rightarrow 0 < 1$, skąd na mocy kryterium Cauchy'ego szereg (1) jest zbieżny.

Jeżeli zaś $e \cdot |z| > 1$, czyli $|z| > 1/e$, to na mocy kryterium d'Alemberta $b_n \rightarrow +\infty > 1$, skąd na mocy kryterium Cauchy'ego szereg (1) jest rozbieżny.

Stąd wniosek, że promień zbieżności szeregu potęgowego (1) jest równy $1/e$.

Odpowiedź: Dany w zadaniu zespolony szereg potęgowy ma promień zbieżności $1/e$.