

**Dzień 47 (poniedziałek 25 maja 2020)****Zespolone szeregi potęgowe (c.d.)**

Przypominam, że zespolonym szeregiem potęgowym nazywamy szereg postaci

$$\sum_{n=0}^{\infty} z_n z^n,$$

gdzie  $z_n$  są współczynnikami zespolonymi, natomiast  $z$  przebiega liczby zespolone.

W piątek zobaczyliśmy kilka przykładów, w których wyznaczaliśmy obszar zbieżności zespolonego szeregu potęgowego. W obliczeniach traktowaliśmy taki szereg jak zespolony szereg liczbowy z parametrem zespolonym  $z$ . Co prawda będziemy rozumieli, że w obszarze zbieżności takiego szeregu można z jego sum skomponować funkcję zmiennej zespolonej  $z$ , ale o funkcjach zmiennej zespolonej prawie nie będziemy mówić<sup>1</sup>.

Jak można podejrzewać na podstawie dotychczasowych przykładów, obszar zbieżności zespolonego szeregu potęgowego jest kołem o środku w zerze, a promień tego koła nazywamy promieniem zbieżności zespolonego szeregu potęgowego. W skrajnych sytuacjach koło zbieżności może być całą płaszczyzną zespoloną albo degenerować się do zbioru jednopunktowego złożonego z zera. Jeśli zaś promień zbieżności jest dodatni i skończony<sup>2</sup>, to na okręgu będącym brzegiem tego koła mogą się dziać różne rzeczy: szereg może być zbieżny, szereg może być rozbieżny, szereg może być zbieżny w części punktów, a w części rozbieżny.

Wyjaśnia się natomiast zagadka, dlaczego w przypadku rzeczywistego szeregu potęgowego używaliśmy zwrotu *promień zbieżności* dla określenia połowy długości przedziału zbieżności. Mówienie o promieniu przedziału jest co najmniej dziwne<sup>3</sup>. Jednak rzeczywisty szereg potęgowy jest także zespolonym szeregiem potęgowym<sup>4</sup>, który to szereg potęgowy ma obszar zbieżności będący kołem na płaszczyźnie zespolonej<sup>5</sup>, a ograniczając się do prostej rzeczywistej widzimy tylko ślad tego koła w postaci przedziału. W konsekwencji promień zbieżności rzeczywistego szeregu potęgowego to promień koła, którego ten przedział jest średnicą.

<sup>1</sup>A dokładniej: pozwolimy sobie nazwać pewne funkcje czy też zapisać je wzorem, ale nie będziemy odnosić się do własności takich funkcji. Teoria takich funkcji jest niewyobrażalnie bogata i pełna fascynujących zjawisk. Na przykład: funkcja zespolona mająca pochodną w sensie zespolonym, ma pochodne wszystkich rzędów i jest sumą szeregu potęgowego; pewne całki rzeczywiste można obliczać całkując funkcje zespolone po krzywej okrążającej osobliwość (hasło: *residua*). Ale to, skromnie licząc, wymaga co najmniej semestralnego wykładu. Jeśli kogoś to interesuje, może w przyszłości (po zaliczeniu Analizy 3) zerknąć na wykład z nazwą w stylu: *Funkcje zespolone, Funkcje analityczne, Analiza zespolona*.

<sup>2</sup>Czyli mamy prawdziwe geometryczne koło.

<sup>3</sup>Ja zwykle podaję, że mam 170 cm wzrostu a nie mówię, że mam promień 85 cm.

<sup>4</sup>Wystarczy bowiem zamienić literkę  $x$  na  $z$  i umówić się, że przebiega ona wartości zespolone.

<sup>5</sup>Mówienie o promieniu jest tu jak najbardziej na miejscu.

Dla ilustracji przedstawie<sup>6</sup> przykłady szeregów o charakterystycznych kołach zbieżności:

- Cała płaszczyzna:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}.$$

- Zbiór jednopunktowy złożony z zera:

$$\sum_{n=0}^{\infty} n! z^n.$$

- Koło o środku w zerze i promieniu  $R$  bez brzegu:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{R^n}.$$

- Koło o środku w zerze i promieniu  $R$  z brzegiem:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2 \cdot R^n}.$$

- Koło o środku w zerze i promieniu  $R$  z brzegiem bez punktu  $R$ :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n \cdot R^n}.$$

- Koło o środku w zerze i promieniu  $2$  z brzegiem bez  $3$  punktów:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{3n}}{(-8)^n \cdot n}. \quad (\text{zad. 459})$$

- Koło o środku w zerze i promieniu  $\sqrt{2}$  z brzegiem bez  $8$  punktów:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{8n}}{16^n \cdot n}. \quad (\text{zad. 460})$$

- Koło o środku w zerze i promieniu  $1$  z siecią<sup>7</sup> na brzegu:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{n3^n}}{n}.$$

---

<sup>6</sup>Bez wchodzenia w szczegóły dlaczego obszary zbieżności są takie jak podaję — w większości przypadków jest to łatwe ćwiczenie.

<sup>7</sup>To znaczy, że na okręgu o promieniu  $1$  szereg jest zbieżny na gęstym zbiorze i rozbieżny na gęstym zbiorze. Ten szereg jest bardzo podobny do szeregu trygonometrycznego z przykładu 2 z 7 maja (korona35 str. 271).

Teraz zajmijmy się jednym szczególnym szeregiem potęgowym, a mianowicie szeregiem

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

zbieżnym na całej płaszczyźnie zespolonej. Ponieważ współczynniki tego szeregu są liczbami rzeczywistymi, możemy rozważać ten szereg na prostej rzeczywistej jako rzeczywisty szereg potęgowy:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

Jak wiemy, sumą tego szeregu jest funkcja wykładnicza:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

Podsumujmy więc: mamy szereg potęgowy, który jest zbieżny zarówno dla argumentów rzeczywistych jak i zespolonych. I mamy funkcję, która ma sens tylko dla argumentów rzeczywistych<sup>8</sup>. Ta funkcja i suma tego szeregu są równe dla argumentów rzeczywistych. Skoro tak, to naturalnym wydaje się, aby ową funkcję rozszerzyć na całą płaszczyznę zespoloną przyjmując jako jej definicję sumę owego szeregu potęgowego:

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}.$$

Tak zdefiniowana funkcja wykładnicza na płaszczyźnie zespolonej spełnia dla każdych liczb zespolonych  $z_1, z_2$  równość

$$e^{z_1+z_2} = e^{z_1} \cdot e^{z_2},$$

gdyż własność ta może być udowodniona na gruncie formalnego mnożenia szeregów potęgowych poprzez udowodnienie<sup>9</sup> równości:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z_1+z_2)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z_1^n}{n!} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z_2^n}{n!}.$$

To może posłużyć do wyprowadzenia bardziej praktycznego wzoru na  $e^z$ , bo trudno sobie wyobrazić, abyśmy do obliczeń każdorazowo używali szeregu. Jeżeli  $z = x + yi$ , gdzie  $x, y$  są liczbami rzeczywistymi, to

$$e^z = e^{x+yi} = e^x \cdot e^{yi}.$$

Czym jest  $e^x$ , to rozumiemy. A czym jest tajemnicze  $e^{yi}$ ? Nie ma wyjścia, ten jeden raz musimy użyć szeregu, bo innego punktu zaczepienia nie mamy. Otrzymujemy<sup>10</sup>

$$e^{yi} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(yi)^n}{n!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(yi)^{2k}}{(2k)!} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(yi)^{2k+1}}{(2k+1)!} = \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k y^{2k}}{(2k)!}}_{=\cos y} + i \cdot \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k y^{2k+1}}{(2k+1)!}}_{=\sin y} = \cos y + i \cdot \sin y.$$

<sup>8</sup>Bo na gruncie naszej dotychczasowej wiedzy nie widać jak nadać sens np. wyrażeniu  $e^i$ .

<sup>9</sup>Nie jest to trudne, wystarczy bowiem przekonać się, że po obu stronach równości jednomian  $z_1^k z_2^m$  występuje z takim samym współczynnikiem. Nie bawię się w to jednak, bo nie jest to w tej chwili najważniejsze.

<sup>10</sup>Jak zwykle: jeśli nie posługujesz się biegle znakiem  $\sum$ , rozpisz sobie te sumy z kropeczkami.

W konsekwencji otrzymujemy wzór

$$e^{x+yi} = e^x \cdot (\cos y + i \cdot \sin y) .$$

Widzimy więc, że za wartość bezwzględną liczby  $e^z$  odpowiada część rzeczywista liczby  $z$ , natomiast argument liczby  $e^z$  jest częścią urojoną liczby  $z$ .

Powyższy wzór wyjaśnia, skąd się wziął zapis  $e^{yi}$  używany czasem jako skrót<sup>11</sup> dla napisu  $\cos y + i \cdot \sin y$ .

Przy okazji wyjaśniło się też, co oznacza wzór  $e^{i\pi} + 1 = 0$ , który zapewne podpatrzyliście u Krasnala Matematyka.

Morał stąd jest następujący: Jeżeli mamy dobrze znaną<sup>12</sup> funkcję zmiennej rzeczywistej, która to funkcja jest sumą szeregu potęgowego, to można tę funkcję rozszerzyć na płaszczyznę zespoloną<sup>13</sup>. Oczywiście nie dotyczy to np. funkcji wymiernych, bo te bez żadnej łaski sobie interpretujemy dla liczb zespolonych.

Dzisiejszy wykład zakończę wymienieniem kilku tego typu przykładów<sup>14</sup>.

$$\begin{aligned} \sin z &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!} & z \in \mathbb{C} \\ \cos z &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!} & z \in \mathbb{C} \\ \ln(1+z) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} z^n}{n} & |z| \leq 1, z \neq -1 \\ \operatorname{arctg} z &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{2n+1} & |z| \leq 1, z \neq \pm i \end{aligned}$$

Na szczególną uwagę zasługuje logarytm, który okazuje się być funkcją odwrotną<sup>15</sup> do funkcji wykładniczej, a w związku z tym może być obliczany według wzoru<sup>16</sup>:

$$\ln z = \ln|z| + i \cdot \arg z .$$

<sup>11</sup>Póki nie mamy zdefiniowanej funkcji wykładniczej dla argumentów zespolonych, to  $e^{yi}$  można uważać tylko za dziwny skrót.

<sup>12</sup>I najlepiej: jakoś nazwaną.

<sup>13</sup>Może nie całą, może tylko na jakieś koło o środku w zerze.

<sup>14</sup>Jak widać przykłady te sprowadzają się do zapisania funkcji rzeczywistej w postaci rzeczywistego szeregu potęgowego i zamianie literki  $x$  na  $z$ . Dla porządku trzeba też określić koło zbieżności szeregu potęgowego.

<sup>15</sup>To, że jest funkcją odwrotną znowu wynika z pewnych tożsamości formalnych na szeregach potęgowych. Podany szereg potęgowy definiuje logarytm tylko w pewnym kole. Jednak logarytm jako funkcję odwrotną do wykładniczej można zdefiniować na całej płaszczyźnie zespolonej bez zera. Jednak taka definicja nie jest jednoznaczna, bo funkcja wykładnicza nie jest różnowartościowa, np.  $e^0 = e^{2\pi i}$ . Ale takie są uroki funkcji zmiennej zespolonej i oczywiście nie będę w to wchodzić głębiej.

<sup>16</sup>Zauważ, że logarytm ma tu argument  $z$ , a we wzorze powyżej ma argument  $1+z$ .