

Dzień 48 (wtorek 26 maja 2020)**Zespolone szeregi potęgowe (c.d.)**

Przypominam najpotrzebniejsze wzory z wczorajszego dnia:

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = e^x \cdot (\cos y + i \cdot \sin y) \quad z = x + yi, \quad x, y \in \mathbb{R}$$

$$\ln(1+z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} z^n}{n} \quad |z| \leq 1, \quad z \neq -1$$

$$\ln z = \ln|z| + i \cdot \arg z \quad |z-1| \leq 1, \quad z \neq 0, \quad \arg z \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

462. Wyprowadzić wzory na sumy

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n!} \quad \text{oraz} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos nx}{n!}.$$

Wskazówka: $z = \cos x + i \cdot \sin x$.

Zanim zajrzysz na kolejną stronę, rozwiąż powyższe zadanie, a przynajmniej podejmij próbę rozwiązania, aby wiedzieć, gdzie napotykasz trudności.

Rozwiązanie:

Wstawiając

$$z = \cos x + i \cdot \sin x$$

do wzoru

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

i pamiętając, że

$$z^n = \cos nx + i \cdot \sin nx ,$$

otrzymujemy

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos nx + i \cdot \sin nx}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos nx}{n!} + i \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin nx}{n!} .$$

Z kolei zastosowanie wzoru

$$e^{a+bi} = e^a \cdot (\cos b + i \cdot \sin b)$$

dla $a = \cos x$ oraz $b = \sin x$ prowadzi do

$$\begin{aligned} e^z &= e^{\cos x + i \cdot \sin x} = e^{a+bi} = e^a \cdot (\cos b + i \cdot \sin b) = e^{\cos x} \cdot (\cos \sin x + i \cdot \sin \sin x) = \\ &= e^{\cos x} \cdot \cos \sin x + i \cdot e^{\cos x} \cdot \sin \sin x . \end{aligned}$$

Wobec tego

$$\underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos nx}{n!}}_{\text{rzeczywiste}} + i \cdot \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin nx}{n!}}_{\text{rzeczywiste}} = \underbrace{e^{\cos x} \cdot \cos \sin x}_{\text{rzeczywiste}} + i \cdot \underbrace{e^{\cos x} \cdot \sin \sin x}_{\text{rzeczywiste}} ,$$

skąd

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos nx}{n!} = e^{\cos x} \cdot \cos \sin x$$

oraz¹

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n!} = e^{\cos x} \cdot \sin \sin x .$$

463. Podać wartości całek (bez wykonywania całkowania !!!):

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} e^{\cos x} \cdot \sin \sin x \, dx , & \quad \int_0^{2\pi} e^{\cos x} \cdot \cos \sin x \, dx , \\ \int_0^{2\pi} e^{\cos x} \cdot \cos \sin x \cdot \cos nx \, dx , & \quad \int_0^{2\pi} e^{\cos x} \cdot \cos \sin x \cdot \sin nx \, dx , \\ \int_0^{2\pi} e^{\cos x} \cdot \sin \sin x \cdot \cos nx \, dx , & \quad \int_0^{2\pi} e^{\cos x} \cdot \sin \sin x \cdot \sin nx \, dx . \end{aligned}$$

Zanim zajrzysz na kolejną stronę, rozwiąż powyższe zadanie, a przynajmniej podejmij próbę rozwiązania, aby wiedzieć, gdzie napotkasz trudności.

¹Składnik odpowiadający $n=0$ jest zerem, więc go pomijamy.

Rozwiązanie:

Z poprzedniego zadania wiemy, jakie są szeregi Fouriera zdefiniowanych poniżej funkcji f oraz g

$$f(x) = e^{\cos x} \cdot \cos \sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos nx}{n!} = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

oraz

$$g(x) = e^{\cos x} \cdot \sin \sin x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n!} = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (c_n \cos nx + d_n \sin nx) .$$

Z przyrównania powyższych szeregów trygonometrycznych wnioskujemy, że odpowiednie współczynniki są równe:

$$\begin{aligned} a_0 &= 1, & a_n &= \frac{1}{n!}, & b_n &= 0, \\ c_0 &= c_n = 0, & d_n &= \frac{1}{n!}. \end{aligned}$$

Wobec tego ze wzorów na współczynniki szeregu Fouriera otrzymujemy²:

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} e^{\cos x} \cdot \sin \sin x \, dx &= \int_0^{2\pi} g(x) \, dx = 2\pi \cdot c_0 = 0, \\ \int_0^{2\pi} e^{\cos x} \cdot \cos \sin x \, dx &= \int_0^{2\pi} f(x) \, dx = 2\pi \cdot a_0 = 2\pi, \\ \int_0^{2\pi} e^{\cos x} \cdot \cos \sin x \cdot \cos nx \, dx &= \int_0^{2\pi} f(x) \cdot \cos nx \, dx = \pi \cdot a_n = \frac{\pi}{n!}, \\ \int_0^{2\pi} e^{\cos x} \cdot \cos \sin x \cdot \sin nx \, dx &= \int_0^{2\pi} f(x) \cdot \sin nx \, dx = \pi \cdot b_n = 0, \\ \int_0^{2\pi} e^{\cos x} \cdot \sin \sin x \cdot \cos nx \, dx &= \int_0^{2\pi} g(x) \cdot \cos nx \, dx = \pi \cdot c_n = 0, \\ \int_0^{2\pi} e^{\cos x} \cdot \sin \sin x \cdot \sin nx \, dx &= \int_0^{2\pi} g(x) \cdot \sin nx \, dx = \pi \cdot d_n = \frac{\pi}{n!}. \end{aligned}$$

464. Obliczyć

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \quad \text{oraz} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$$

przyglądając się na wszystkie strony $\ln(1+i)$.

Zanim zajrzysz na kolejną stronę, rozwiąż powyższe zadanie, a przynajmniej podejmij próbę rozwiązania, aby wiedzieć, gdzie napotkasz trudności.

²Trzy całki równe 0 są całkami z funkcji nieparzystej, a przedział całkowania można przesunąć do $(-\pi, \pi)$, więc w tych przypadkach obezlibyśmy się bez szeregów Fouriera.

Rozwiązanie:

Zgodnie ze wzorem

$$\ln(1+z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \cdot z^n}{n}$$

zastosowanym do $z=i$ otrzymujemy

$$\begin{aligned} \ln(1+i) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \cdot i^n}{n} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{2k+2} \cdot i^{2k+1}}{2k+1} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{2k+1} \cdot i^{2k}}{2k} = \\ &= i \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{2k} = \frac{1}{2} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} + i \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1}. \end{aligned}$$

Z kolei wzór

$$\ln z = \ln|z| + i \cdot \arg z$$

zastosowany do $z=1+i$ daje

$$\ln(1+i) = \ln|1+i| + i \cdot \arg(1+i) = \ln\sqrt{2} + i \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{\ln 2}{2} + i \cdot \frac{\pi}{4}.$$

Wobec tego

$$\frac{1}{2} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} + i \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} = \frac{\ln 2}{2} + i \cdot \frac{\pi}{4},$$

skąd

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = \ln 2$$

oraz

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} = \frac{\pi}{4}.$$

465. Przytoczony wczoraj zespolony szereg potęgowy

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{n \cdot 3^n}}{n}$$

w punktach postaci $z = e^{k\pi i/3^m}$, gdzie $m \in \mathbb{N}$ oraz $k \in \mathbb{Z}$, jest zbieżny albo rozbieżny³ w zależności od parzystości k .

Zadanie dotyczy jednak zbieżności tego szeregu w punkcie na okręgu jednostkowym, który to punkt jest innej postaci niż powyższa.

Obliczyć sumę tego szeregu dla $z=i$.

Przypomnienie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \ln 2, \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4},$$

Zanim zajrzysz na kolejną stronę, rozwiąż powyższe zadanie, a przynajmniej podejmij próbę rozwiązania, aby wiedzieć, gdzie napotykasz trudności.

³To tylko tak dla informacji, bo do rozwiązania zadania to nie jest przydatne.

Rozwiązanie:

Dla $z = i$, po uwzględnieniu⁴ $i^a = i^b$ dla $a \equiv b \pmod{4}$, dany szereg przyjmuje postać⁵

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^{n \cdot 3^n}}{n} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^{2n \cdot 3^{2n}}}{2n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^{(2n+1) \cdot 3^{2n+1}}}{2n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^{(2n+1) \cdot 3}}{2n+1} = \\ &= -\frac{1}{2} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^{6n+3}}{2n+1} = -\frac{\ln 2}{2} - i \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = -\frac{\ln 2}{2} - \frac{\pi i}{4}. \end{aligned}$$

Odpowiedź: Dla $z = i$ suma danego szeregu jest równa $-\frac{\ln 2}{2} - \frac{\pi i}{4}$.

⁴Uwzględniamy to tak, że $3^{2n+1} \equiv 3 \pmod{4}$, skąd $i^{3^{2n+1}} = i^3$. Można też wyjść od $i^9 = i$, a następnie przez $i^{9^n} = i$ dojść do $i^{3^{2n+1}} = i^3$.

⁵Pierwsza równość to rozbiecie sumy na dwie sumy: w pierwszej znajdują się składniki o indeksach parzystych, a w drugiej o nieparzystych. Przy okazji zmienia się znaczenie zmiennej n . Jeśli wolisz, możesz sobie wyobrazić równość

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^{n \cdot 3^n}}{n} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{i^{2k \cdot 3^{2k}}}{2k} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{i^{(2k+1) \cdot 3^{2k+1}}}{2k+1},$$

gdzie w pierwszej sumie przyjmujemy $n = 2k$, a w drugiej $n = 2k+1$.