Dzień 49 (środa 27 maja 2020)

Tydzień temu[1] zakończyłem wykład następująco:

Widać wyraźnie, że szeregi potęgowe i trygonometryczne mają zupełnie inne własności. Jednak wkrótce zobaczymy, że są one różnymi obliczami tego samego obiektu...

Przypomnę, że najważniejsze różnice[2] to:

• Obszar zbieżności szeregu potęgowego jest przedziałem, obszar zbieżności szeregu trygonometrycznego może być sieczką.

• Suma szeregu potęgowego jest nieskończenie różniczkowalna, suma szeregu trygonometrycznego może być nawet nieciągła.

• Funkcja może nie być sumą swojego szeregu Taylora, natomiast przy minimalnych założeniach funkcja jest sumą swojego szeregu Fouriera.

Można więc przypuszczać, że szereg potęgowy[3]

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

jest czymś z innego świata niż szereg trygonometryczny

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \ .$$

Rzeczywisty szereg potęgowy

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

możemy odnaleźć jako ślad zespolonego szeregu potęgowego

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$$

na prostej rzeczywistej. To nie wydaje się być jakąś wielką niespodzianką. Natomiast mniej oczywiste jest, że szereg trygonometryczny możemy prawie znaleźć w zespolonym szeregu potęgowym jako nawinięty na okrąg jednostkowy !!! Wystarczy przypomnieć sobie, że dla[4]

$$z = e^{xi} = \cos x + i \cdot \sin x$$

mamy

$$z^n = \cos nx + i \cdot \sin nx \ .$$

[1] Środa 20 maja, korona44.

[2] W tym miejscu własności szeregów odnotowuję hasłowo. Dla większej precyzji trzeba się cofnąć do odpowiedniego wykładu.

[3] Współczynniki oznaczam przez c_n, aby uniknąć konfliktu oznaczeń ze współczynnikami szeregu trygonometrycznego, który pojawi się za chwilę.

[4] Czyli dla z-tów z okręgu jednostkowego sparametryzowanych x-em.

Wtedy na okręgu jednostkowym sparametryzowanym argumentem, zespolony szereg potęgowy przyjmuje postać:

$$\sum_{n=0}^{\infty} d_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} d_n (\cos x + i \cdot \sin x)^n = \sum_{n=0}^{\infty} d_n (\cos nx + i \cdot \sin nx) = \sum_{n=0}^{\infty} d_n \cos nx + i \cdot \sum_{n=0}^{\infty} d_n \sin nx\,,$$

co już zaczyna pachnieć szeregiem trygonometrycznym.

Skoro wyszliśmy od zespolonego szeregu potęgowego, to jego współczynniki d_n nie muszą być rzeczywiste. Jeśli przyjmiemy na przykład

$$d_n = a_n - b_n \cdot i\,,$$

to otrzymamy

$$\sum_{n=0}^{\infty} d_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} d_n \cos nx + i \cdot \sum_{n=0}^{\infty} d_n \sin nx = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n - b_n \cdot i) \cos nx + i \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (a_n - b_n \cdot i) \sin nx =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \cdot \cos nx + b_n \cdot \sin nx) + i \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \cdot \sin nx - b_n \cdot \cos nx)\ .$$

Widzimy więc, że szereg trygonometryczny jest częścią rzeczywistą odpowiednio dobranego zespolonego szeregu potęgowego na okręgu jednostkowym.

Namiatki tego zjawiska już mieliśmy okazję doświadczyć, kiedy najpierw poznaliśmy przykład szeregu trygonometrycznego

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n \cdot 3^n \cdot x)}{n}\,, \tag{$\spadesuit$}$$

którego obszar zbieżności jest gęstą sieczką, a jakiś czas później poznaliśmy zespolony szereg potęgowy

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{n3^n}}{n}\,, \tag{$\heartsuit$}$$

który jest zbieżny w kole o promieniu 1, ale na okręgu jednostkowym jest zbieżny na gęstym zbiorze i rozbieżny na gęstym zbiorze.

Niby dwa przykłady, a tak naprawdę jeden, bo szereg trygonometryczny ($\spadesuit$) jest częścią rzeczywistą zespolonego szeregu potęgowego ($\heartsuit$) na okręgu jednostkowym, na który nawinięta[5] została prosta rzeczywista.

Przyjrzyjmy się szeregowi potęgowemu logarytmu:

$$\ln(1+z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} z^n}{n} \qquad |z| \leqslant 1,\ z \neq -1$$

dla wygody[6] przepisanemu w postaci

$$-\ln(1-z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n} \qquad |z| \leqslant 1,\ z \neq 1$$

Szereg ten na okręgu jednostkowym jest zbieżny poza punktem 1. Przyjrzyjmy się szeregom trygonometrycznym, których ślad możemy zobaczyć na okręgu jednostkowym.

[5] Przez parametryzację $z = e^{xi} = \cos x + i \cdot \sin x$.

[6] I urody.

Wstawiając do rozważanego szeregu $z=\cos x+i\cdot\sin x$ otrzymamy kolejno:

$$-\ln(1-\cos x-i\cdot\sin x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\cos x+i\cdot\sin x)^n}{n},$$

$$-\ln|1-\cos x-i\cdot\sin x|-i\cdot\arg(1-\cos x-i\cdot\sin x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n}+i\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n},$$

$$-\frac{1}{2}\cdot\ln(2-2\cos x)-i\cdot\operatorname{arctg}\frac{-\sin x}{1-\cos x}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n}+i\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n},$$

skąd

$$-\frac{1}{2}\cdot\ln(2-2\cos x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n}$$

oraz

$$\operatorname{arctg}\frac{\sin x}{1-\cos x}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}.$$

Po uwzględnieniu tożsamości

$$1-\cos x=2\cdot\sin^2\frac{x}{2}$$

otrzymujemy

$$(\diamondsuit)\qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n}=-\frac{1}{2}\cdot\ln(2-2\cos x)=-\frac{1}{2}\cdot\ln 4\sin^2\frac{x}{2}=-\ln\left|2\cdot\sin\frac{x}{2}\right|$$

oraz

$$(\clubsuit)\qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}=\operatorname{arctg}\frac{\sin x}{1-\cos x}=\operatorname{arctg}\frac{2\cdot\sin\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2}}{2\cdot\sin^2\frac{x}{2}}=\operatorname{arctg}\frac{\cos\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}=\operatorname{arctg}\frac{1}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}=$$

$$=\left\{\begin{array}{lll}\operatorname{arctg}\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{x}{2}\right) & \text{dla} & x\in(0,\pi)\\ \operatorname{arctg}\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{2}-\frac{x}{2}\right) & \text{dla} & x\in(-\pi,0)\end{array}\right\}=\left\{\begin{array}{lll}\frac{\pi}{2}-\frac{x}{2} & \text{dla} & x\in(0,\pi)\\ -\frac{\pi}{2}-\frac{x}{2} & \text{dla} & x\in(-\pi,0)\end{array}\right.$$

Zwróćmy uwagę, że szereg $(\diamondsuit)$ jest rozbieżny dla $x=0$, gdyż wówczas otrzymujemy szereg harmoniczny. A jego suma jest funkcją nieograniczoną mającą osobliwość w zerze. Tym samym otrzymaliśmy przykład funkcji nieograniczonej, która jest sumą[7] swojego szeregu Fouriera. To pokazuje, że założenia, przy których funkcja jest sumą swojego szeregu Fouriera, mogą być dość skromne, gdyż nieograniczoność funckcji jest czymś gorszym niż nieciągłość przy zachowaniu ograniczoności. A wzory na współczynniki szeregu Fouriera prowadzą w tym wypadku do całek niewłaściwych.

Z kolei podaną wyżej sumę szeregu $(\clubsuit)$ należy uzupełnić o uwagę, że jest ona równa zeru w punktach postaci $k\pi$. Przy tym suma ta jest funkcją ciągłą w punktach $(2k+1)\pi$ i nieciągłą w punktach $2k\pi$.

To był ostatni nowy temat. Resztę semestru poświęcimy na powtórzenia, uzupełnienia i merytoryczno-techniczne przygotowania do egzaminu, który odbędzie się w formie zdalnej (najprawdopodobniej w poniedziałek 22 czerwca 2020). Zaliczenie będzie wystawione na podstawie egzaminu (z ewentualnym uwzględnieniem aktywności).

[7] Jeśli zignorujemy rozbieżność w punkcie 0, czyli, ze względu na okresowość, w punktach postaci $2k\pi$.